ARCHIMEDIS OPERA:

APOLLONII PERGÆI CONICORUM LIBRI IIII.

THEODOSII SPHÆRICA:

METHODO NOVA

ILLUSTRATA, & Succinctè DEMONSTRATA.

PER

Is. BARROW, Exprofessorem *Lucasianum* CANTAB.

& Societatis Regiæ Soc.

LONDINI,

Excudebat *Guil. Godbid*, vœneunt apud *Rob. Scott*, in vico Little Britain. 1675.

510
Ar21

Lectori.

Vetuſtos authores, ſcientiarum parentes, ab interitu ſalvos præſtari, poſterorum intereſſe videtur, nè ingrati audiant. Neque tametſi quæ continent pleraque novis artificiis vel promptiùs elici, vel conciſiùs aſtrui poſſint, fructu penitus deſtituitur illorum lectio. Nam amænum imprimìs videtur quibus à fundamentis tantum in faſtigium evectæ ſunt ſcientiæ diſpicere; tum haud inutile fuerit deguſtare fontes, è quibus cuncta fermè recentiorum inventa dimanârunt; iſtorum quippe perquam ingenioſas atque ſubtiles perſequendo vel æmulando methodos horum emicuit induſtria. Porrò ſincerum demon-

ſtrandi guſtum ac peritiam non aliunde quis opinor feliciùs hauſerit, quàm ex iis, quorum in theorematis deducendis præcipuæ relucent ſolertia ac elegantia; quas ut nemo tranſgredi poſſit, ita vix aſſequi quiſquam valeat ab illorum Scriptis peregrinus: Ut taceam, cùm à poſteris hæc ſcripta ſuis firmandis præſternantur, allegenturque paſſim, illorum referre qui hæc ſtudia tractant, ea præſtò ad manum, nè dicam ad unguem, habere: Id ut promptè tibi ſuccedat, & quàm exiguo impendio, præſtitura videtur hæc editio; ſaltem præ illis, quæ enormi juxta mole ſpiſſæ ac pretio caræ hactenus proſtant; ſin hæc nihilominus diſpliceat, det ille quæſo tibi pœnas, qui amicitiâ præpotenter abuſus, me nequicquam reclamante, protruſit hæc crepundia, luci publicæ minimè nata vel debita. Vale.

134

ARCHIMEDIS OPERA:

Methodo Nova Illustrata, & Succinctè Demonstrata.

Per ISAACUM BARROW,

Ex-professorem Lucasianum *Cantab.* & Soc. Regiæ Soc.

LONDINI,

Excudebat *Guil. Godbid*, vœneunt apud *Robertum Scott*, in vico Little-Britain. 1675.

Brevitatis gratiâ notæ quædam adhibentur, quarum hîc ſubjungitur interpretatio.

A + B, *hoc eſt*	A & B *ſimul acceptæ.*
A − B,	A, *demptâ* B.
A −: B,	*differentia ipſarum* A, & B.
A × B,	A *multiplicata, vel ducta in* B.
$\frac{A}{B}$	A *diviſa per* B, *vel applicata ad* B.
A = B,	A *æquatur ipſi* B.
A ⊏ B,	A *major eſt quàm* B.
A ⊐ B,	A *minor eſt quàm* B.
A . B :: C . D,	A *ad* B *eandem rationem habet, quàm* C *ad* D.
A, B, C, D ÷÷,	A, B, C, D *ſunt continuè proportionales.*
A . B ⊏ C . D,	A *ad* B *majorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
A . B ⊐ C . D,	A *ad* B *minorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
A . B + C . D ⊏ = ⊐	M.N. *Rationes* A ad B, & C ad D *compoſitæ* { *adæquant* / *excedunt* / *deficiunt à* } *rationem* M ad N.
Aq,	*Quadratum ex* A.
√A,	*Latus, vel radix quadrata ipſius* A.
Ac,	*Cubus ex* A.
√Aq + Bq,	*Latus compoſiti ex* Aq & Bq.

Reliquas, ſi quæ occurrunt, abbreviaturas Lector facili conjecturâ capiet, præſertim in analyſi tantillùm verſatus.

PLUTARCH. *in vita* MARCELLI.

Pag. 307. 596.

ATqui eos ſpiritus Archimedes, *eam altitudinem ingenii, tantâſque præceptorum divitias tenuit, ut quum per ea nomen atque opinionem ſibi paraviſſet non humanæ ſed divinæ ſcientiæ, nullum de his relinquere commentarium ſuſtinuerit: verùm illa in parandis machinamentis induſtria, atque adeo omni quæ ad uſum ſe applicaret, & ad utilitatem, arte pro humili & ſordida repudiata, in iis tantùm poſuerit ſtudium ſuum, quæ præclara & eximia per ſe, neque ulli adſtricta neceſſitati eſſent, non conferenda quidem cum aliis, ſed quæ certamen excitent cum materia demonſtrationi, quum illa mole & ſpecie, exquiſita hæc certitudine & vi excellat incredibili: neque enim implicatiores in geometria & contortas magis quæſtiones, in ſimplicioribuſque liquidioribuſque conſcriptas elementis invenias. Id dexteritati illius ingenij alij attribuunt: alij ad laborem referendum putant potius indefatigatum, quo quivis eum efficere veriſimile ſit facilè & citra ſudorem potuiſſe. Nam ſi quæras, per te non invenias demonſtrationem illius quæſtionum: Ubi didiceris, potuiſſe putes te eam vel tua ſponte invenire, adeo ſtrata eſt via atque expedita, quæ ad id quod intendit demonſtrare perducit. Quare non ſunt rejicienda illa quæ de eo feruntur, à ſua quadam & familiari* Archimedem *perpetuò demulcitum Sirene, & cibi oblivi ſci & corporis curam relinquere ſolitum: quùmque raperetur ſubinde invitus ad ungendum corpus & ad balneum in foco figuras geometricas exarare: & dum ungeretur, ducere digito lineas, tanta illum dulcedine artis captum & revera inflammatum fuiſſe. Quum autem multa, & præclara inveniſſet, dicitur ab amicis & propinquis petiſſe ut vita defuncti cylindrum ſphæram complectentem ſepulcro imponerent, inſcriberéntque proportionem, quatenus ſolidum continens excedat contentum. Atque is* Archimedes *quum eſſet, invictum ſe urbémque, quantum in ipſo eſſet, præſtitit.*

Plu-

PLUTARCH. *in vita* MARCELLI.

Pag. 307.

ΤΗλικοῦτον μὲν οὖν φρόνημα καὶ βάθος ψυχῆς, καὶ τοσοῦτον ἐπίκτητον ἐπιστήμασι πλοῦτον Ἀρχιμήδης, ὥστε ἐφ' οἷς ἤνεγκε καὶ δόξαν οὐκ ἀνθρωπίνης ἀλλὰ δαιμονίου τινὸς ἔχειν σοφίαν, μηδὲν ἀξιῶσαι σύγγραμμα περὶ τούτων ἀφεῖναι, ἀλλὰ τὸν περὶ τὰ μηχανικὰ πραγματείαν καὶ πᾶσαν ὅλως τέχνην χρείας ἐφαπτομένην ἀφυῆ καὶ βάναυσον ἡγησάμενος, ἐπέσπευδε μόνα τὰ αὐτῆς φιλοσοφίας, οἷς τὸ καλὸν καὶ σεμνὸν ἀμιγὲς τῇ ἀναγκαίου φύσιν, ἀνυπέρβλητα μὲν ὄντα τοῖς ἄλλοις, εἶναι δὲ παρέχοντα φορὰς τοῖς ὕλῃ τῇ ἀποδείξει, τὸ μὲν τὸ μέγεθος καὶ τὸ καλλος, τῆς δὲ τοῦ ἀπερίσπαστον καὶ τὰν δύναμιν ὑπερφυῆ παρεχομένης. οὐ γὰρ ἔστιν ἐν γεωμετρίᾳ ζητοῦντα εὑρεῖν ἐπιτάσεις ἐν ἀπλανέσιν λαβεῖν καὶ καθαρωτάτοις στοιχείοις χαριέντας. καὶ πῶς οἱ μὲν ἀφυΐᾳ τῇ ἀνθρώπου φασκόντων, οἱ δὲ ὑπερβολῇ τινι πόνου νομίζουσιν, οὐδενὸς περιττοῦ καὶ ῥᾳδίου ἕκαστον εἶναι δοκοῦντος γεγονέναι. ζητῶν μὲν γὰρ οὐκ ἄν τις εὕροι δι' αὐτοῦ τοῦ ἀποδεῖξαι, ἅμα δὲ τῇ μαθεῖν ἐπιόντα δέξα τῷ καὶ αὐτὸν εὑρεῖν, οὕτω λείαν ἔδειν ἄγειν καὶ ταχεῖαν ἐπὶ τὸ δεικνύμενον. οὔκουν οὐδὲ ἀπιστῆσαι τοῖς ἐπὶ αὐτῷ λεγομένοις ἔξεστιν, ὡς ὑπ' οἰκείας δυνάμεως καὶ σωφρόνου θελγόμενον αἰεὶ σχολῇ, ἐλλιπεῖ καὶ σίτου καὶ θεραπείας σώματος ἐξιλάσκειν βίᾳ δὲ πολλάκις ἐλκόμενον ἐπ' ἄλειμμα καὶ λουτρὸν, ἐν ταῖς ἐκλύσεσι ἔγραφεν ἀεὶ σχήματα τῶν γεωμετρικῶν, καὶ τῷ σώματος ἀληλειμμένου διὰν τῷ παιδὶ χαμαιπετῆ, ὑπὸ ἡδονῆς μεγάλης κατεχόμενος καὶ μουσόληπτος ἀληθῶς. πολλῶν δὲ καὶ καλῶν ἐξευρετὴς γενομένων τῷ φίλων δοκοῦσαι καὶ τῶν συγγενῶν, ὅπως αὐτῷ μετὰ τοῦ τελευτῆσαι θυσίαν τιμὴν ἀπονείμωσιν ἐπιθυμοῦντος ἔπεισεν ἐκλαμβάνοντα τὸν στρατὸν ἐντὸς κυλίνδρου θάπτεσθαι λόγον ἡ ὑπόσχεσις τοῦ φιλοτίμου πρὸς τὸ θεωρεῖσθαι μέγα. Ἀρχιμήδης μὲν οὖν παιδικῷ ῥεύματι ἀθάνατον ἑαυτόν τι καὶ τὴν πόλιν ἔσεσθαι ἐφ' ἑαυτῷ διεφύλαξεν.

ARCHI-

ARCHIMEDIS
De Sphæra & Cylindro
LIBER PRIMUS.

Archimedes Dositheo Salutem.

ANtea quidem misi quæ contemplando invenimus, ipsorum adscribentes Demonstrationes; veluti *quòd omnis portio comprehensa sub recta linea, & rectanguli Coni sectione sesquitertia est trianguli habentis eandem basim ac portio, æqualemque altitudinem.* Jam quorundam incidentium Theorematum elaboravimus Demonstrationes, quæ sunt hujusmodi. Primò quidem *quòd Sphæræ superficies quadrupla sit maximi circuli eorum qui in ipsa sunt.* Secundum verò *quòd cujusque portionis sphæræ superficiei æqualis est circulus, cujus radius æquatur rectæ à vertice portionis ductæ ad peripheriam circuli, qui basis est portionis:* adhæc, *quòd omnis sphæræ cylindrus, basin quidem habens eandem maximo, eorum qui in sphæra sunt, circulo, altitudinem verò parem diametro sphæræ, cùm ipse sphæræ sesquialter sit, tum superficies ejus superficiei sphæræ sesquialtera.* Hæc quidem natura præcesserant circa dictas figuras demonstranda, nec tamen ab iis, qui ante nos Geometriæ incubuerunt animadversa sunt; ut intelliget quisquis circa has figuras proposita theoremata cum demonstrationibus contulerit. * Sicut & recepta multa eorum, quæ *Eudoxus* circa Solida speculatus est; veluti *quòd omnis pyramis tertia pars est prismatis basim habentis eandem cum pyramide,*

Pessimè depravatus locus: lego, ταῦτα μὲν τῇ φύσει προυπῆρχον περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα· οὐ μέντοι γέγονεν ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν περὶ γεωμετρίαν ἀνεσκεμμένων τεθεωρημένα, καὶ νοήσαντες ἀν-

* pro καὶ ἐν lego ὥσπερ.

mide, & parem altitudinem: quodque conus omnis subtriplus est Cylindri basin habentis eandem cum Cono, ac æqualem altitudinem: quippe cùm etiam hæc ex natura rei priùs inessent hisce figuris, etsi complures ante *Eudoxum* fuerant haud contemnendi Geometræ, contigit tamen ea ab omnibus ignorata fuisse, neque perspecta à quoquam. Licebit autem illis, qui poterint, circa hæc dispicere. Ex usu quidem fuisset & vellem hæc, adhuc superstite *Conone*, edita fuisse: hunc enim arbitramur imprimis idoneum fuisse hæc expendere, & appositam de iis sententiam proferre; bonum factum verò censentes etiam * aliis Mathematum *studiosis & peritis* impertire, mittimus tibi Demonstrationes adscribentes, de quibus fas erit iis, qui in Mathematicis versantur, dispicere. Vale.

Pro τὸ πάντων εἶσθαι lego ἀπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι.

Pro τῆνον lego τῆνον.

Pro αὐτοῖς lego ἄλλοις.

ADscribuntur primò tam Axiomata quàm Adsumpta ad demonstrationes ipsorum.

Definitiones & Hypotheses.

I. Sunt quædam in plano lineæ curvæ terminatæ, quæ illarum terminos conjungentium rectarum vel totæ, ad easdem partes sunt, vel nihil habent ad alteras.

Scholium.

Lineæ curvæ (vel flexæ, καμπύλης γραμμῆς) nomine designatur non tantùm linea ubique continuóque curva, sed & quomodocunque inflexa; seu mixta è rectis & curvis, seu tota è rectis composita. Quomodo perimeter figuræ cujusvis rectilineæ, vel ejus quæcunque pars angulum includens, est linea καμπύλη. Siquidem rectè *Eutocius*. Ἰστέον οὖν ὅτι καμπύλας γραμμὰς καλεῖ οὐχ ἁπλῶς τὰς κυκλικὰς ἢ κωνικὰς, ἢ ἄκλαστον ἐχούσας τὴν συνέχειαν, ἀλλὰ πᾶσαν ἐν ἐπιπέδῳ γραμμὴν παρὰ τὴν εὐθεῖαν καμπύλην ὀνομάζει. μίαν δὲ γραμμὴν ἐν ἐπιπέδῳ τὴν ὁπωσοῦν συναπτομένην, ὥστε κἂν ἐξ εὐθείων σύγκειται &c. Hujusmodi verò curvarum aliquas adsumit vel totas ad easdem rectarum, quæ terminos ipsarum connectunt, partes jacere, vel saltem nihil ad diversas situm habere. Sit exemplo peripheria circularis A B C, cujus terminos connectat recta A C, liquet totam lineam A B C supra rectam A C attolli ad partes

Fig. 1.

B.

B. Sin accipiatur in chorda A C punctum D, lineæ mixtæ D A B C pars quidem aliqua A B C versùs partes B supra C D (terminos D, C connectentem) jacet, alia pars A D secundum ipsam C D protractam (κατ' 'αυτὴν in sequenti definitione, hoc est ita ut ei congruat) sita est, nulla verò pars intra C D, ad partes ipsi B contrarias, deprimitur.

II. Ad easdem verò partes cavam appello ejusmodi lineam, in qua * sumptis utcunque duobus punctis, quæ iis interjacent rectæ vel omnes ad easdem lineæ partes cadunt, vel aliquæ quidem ad easdem, quædam verò secundùm *ipsam, sed ad diversas nulla.

**lego ἂν (expletivum) pro ἐὰν.*

** aut, supra ipsam.*

Schol. Huic intelligendæ subobscuræ definitioni respiciatur & expendatur antecedentis huic præstructæ hypothesis explicatio; cui tantùm adjiciam certum esse cavitatis in easdem partes continuatæ signum, si nulla recta lineam pluribus quàm duobus punctis secet.

III. Haud absimiliter sunt quædam superficies terminatæ, non quidem ipsæ in plano, sed terminos *habentes (suos) in plano; & plani in quo terminos habent, vel totæ ad easdem partes sunt, vel nihil habent ad alias.

** lego ἔχουσας pro ἔχουσιν.*

IV. In easdem verò cavas ejusmodi voco superficies, in quibus si duo sumantur puncta, quæ punctis interjacent rectæ vel omnes ad easdem superficiei partes cadunt, vel quædam ad easdem, quædam verò secundùm illas, in diversas autem nulla.

Schol. Qui primas duas capit, has intelliget hypotheses nullo negotio.

V. *Sectorem verò solidum* appello, quando sphæram conus secat verticem habens ad centrum sphæræ, comprehensam figuram tum à coni superficie, tum à superficie sphæræ intra conum.

Ut si B A C sit conus, cujus vertex A centrum sphæræ; figura D A E contenta superficie conicâ D A E, & sphæricâ superficie D E, erit sector solidus. Fig. 2.

Fit verò sector solidus D A E ex rotatu sectoris circularis D A Z circa radium A Z; posito arcu D Z = Z E. unde aliter definiri possit. Nota, quòd detracto sectore D A E, residuum è sphæra D X E subinde καταχρηστικῶς dicatur Sector sphæricus, hemispherio major. *vid. schol.* 51. *hujus.*

VI. *Rhombum verò solidum* voco, quando duo coni eandem basim habentes vertices habent ad utramque partem plani basis, ita ut ipsorum axes in directum jaceant, ab ambobus conis compositam figuram solidam.

Talis est figura B A C D constans duobus conis B A C, B D C, quorum communis basis est circulus B C, & axis A D transiens per centrum E. Fig. 3.

Hæc autem adsumo.

Axiomata.

I. Linearum eosdem terminos habentium minimam esse rectam;

II. Alias verò lineas si in eodem plano existentes eosdem terminos habeant, inæquales esse; quando scilicet ambæ ad easdem partes cavæ sunt, & vel una tota comprehenditur ab *altera, & à recta eosdem cum illa terminos habente, vel aliqua comprehenduntur, aliqua verò communia habet: & minorem esse illam quæ comprehenditur.

* *deleo ἐπιφανείας.*

Fig. 4.

Sint exemplo lineæ A C B, A D E B, hisce conditionibus præditæ; quòd nempe sunt in eodem plano, & eosdem terminos A, B habent, & ad easdem partes cavæ sunt; & A C B tota comprehenditur ab A D E B & recta A B, erit A C B minor quàm A D E B. Item, linea mixta Z A C B minor est lineâ Z A D E B, quia Z A communis est, & reliqua A C B comprehenditur ab A D E B, ut prius.

Hoc pronunciatum ab Editoribus hactenus acceptum est pessimè; in duo quippe discerpunt, unum veritate, alterum & sensu cassum. Vide *Rivaltum*, & stupe.

III. Similiter & superficierum eosdem terminos habentium, si in plano terminos habeant, minorem esse quæ plana est.

IV. Alias verò superficies etiam eosdem terminos habentes, si in plano sint termini, inæquales esse, modò sint ambæ ad easdem partes cavæ, & vel una superficies tota comprehenditur ab altera, & a superficie eosdem cum ipsa terminos habente, vel aliquæ (partes) comprehenduntur, aliquas verò communes habet: & majorem esse illam, quæ comprehenditur.

Itidem & hoc Axioma perquam ineptè & absurdè dispertitur in duo. Cæterùm si secundum probè perceperis, etiam hoc facilè assequeris. Lucem fœnerabunt quæ infrà sæpius occurrent Exempla.

V. Quinetiam inæqualium linearum & inæqualium superficierum, ac inæqualium solidorum *majus excedere minus eo quod sibi (aliquoties) adjunctum superare possit designatum quodvis * ad se rationem habens.

* *lego μεῖζον pro μεταξὺ.*

* *vel* sibi homogeneum; *vel* eorum quæ comparari possunt.

* *vel* IV.

Ut si linea A C lineam A B exsuperet lineâ B C, linea B C toties accipi potest (seu taliter multiplicari) ut quamvis lineam (puta Z C) excedat. Sequitur ex *def. V. Elementi V.

Hisce suppositis,

Prop.

* *Prop. I.*

* *Perperam vulgò pronunciatis accenſetur.*

Si circulo (A D F) *inſcribatur polygonum* (A B C D E F) *liquet inſcripti polygoni perimetrum minorem eſſe circuli peripheriâ.*

Nam ſingulum latus, ut A B, minus eſt arcu (A B) quem ſubtendit; & conſequenter ſimul omnia latera arcubus ſimul omnibus minora ſunt, hoc eſt tota perimeter polygoni totâ circuli peripheriâ. Fig. 5. 2 *ax. hujus.*

Coroll. 1. Eâdem planè ratione quomodocunque diviſo arcu quolibet (A D) & ductis ſubtenſis (A B, B C, C D); totus arcus omnibus ſubtenſis major eſt.

Coroll. 2. Sinus rectus arcu ſuo minor eſt, hoc eſt à centro Z ductâ Z Y X ad A B perpendiculari, eſt A Y ⊐ arc A X.

Nam A Y B (2 A Y) ⊐ A X B (2 A X).

Prop. II.

Si circa circulum (A B C D E) *deſcribatur polygonum* (M N O P Q), *polygoni circumſcripti perimeter circuli perimetro major erit.* Fig. 6.

Nam linea compoſita A M + B M major eſt arcu A B, & B N + C N major arcu B C; ac ita de cæteris: quare tota circumſcriptæ figuræ perimeter, totâ circuli peripheriâ major eſt. 2 *ax. huj.*

Corol. 1. Simili ratione quomodocunque diviſo arcu quovis, circumductæ tangentes arcu toto majores ſunt.

Corol. 2. Tangens arcu ſuo major eſt, nempe ductis Z A, Z M, eſt A M ⊏ A Y. Nam A M + B M (2 A M) ⊏ A Y B (2 A Y).

Prop. III.

Datis duabus magnitudinibus inæqualibus (A, B), *poſſibile eſt duas rectas inæquales invenire, ita ut major recta ad minorem habeat minorem rationem, quàm major magnitudo* (A) *ad minorem* (B). Fig. 7.

Multiplicetur A — B, per numerum aliquem (puta N) donec producta magnitudo, quam voco X, exſuperet B. tum aſſumptâ quâvis rectâ R, ſit R. S :: 1. N :: A — B. X. Dico R + S, & S eſſe lineas quæſitas. Nam ob B ⊐ X, erit A — B. B. ⊏ (A — B. X ::) R. S. unde componendo erit A. B ⊏ R + S. S: *Q.E.F.* 5 *ax. huj.* *conſtr.* 8. 5.

Prop.

Prop. IV.

Fig. 8. 9.

Datis duabus magnitudinibus inæqualibus (A,B) *& circulo* (CDEF), *posito circulo polygonum inscribi, aliudque circumscribi, ita ut circumscripti latus ad latus inscripti minorem habeat rationem, quàm magnitudo major* (A) *ad minorem* (B).

a 3 *hujus.* b 1. 10. *el.*

[a]Fiat O P. O Q :: A. B. & descripto super O P semicirculo adaptetur O Q, & conjungatur P Q, tum [b] bisecetur circumferentia C D E F, & ejus semissis D C F, & hujus semissis C D, ac ita continuò, donec angulus D G K, semissis anguli D G H sit æqualis angulo P O R ⊐ ang P O Q. perque K ducatur tangens L M occurrens radiis G D, G H protractis in L, M; tum conjungatur D H. à bisectione liquet rectam L M latus esse polygoni circulo circumscriptibilis, & D H latus polygoni inscriptibilis. Jam ob angulos D G N, R O Q [c] pares, & angulos G N D, O Q R rectos, erunt trigona D G N, R O Q similia. quare G D (G K). G N :: O R. O Q ⊐ O P. O Q. atqui G K. G N :: L K. D N :: L M. D H. ergo L M. D H ⊐ (O P. O Q [c] ⊐) A. B. *Q.E.F*

c *const.* 4. 6. & 8. 5. 15. 5.

Prop. V.

Rursus si fuerint duæ magnitudines inæquales, & sector potest circa sectorem polygonum describi, & aliud inscribi, ut latus circumscripti ad inscripti latus minorem habet rationem, quàm major magnitudo ad minorem.

Eodem planè modo conficitur, quo antecedens.

Prop. VI.

Fig. 10. 11.

Dato circulo (G) *binisque magnitudinibus inæqualibus* (A,B), *circulo polygonum circumscribere, & aliud inscribere, ita ut circumscriptum ad inscriptum minorem habeat rationem, quàm major magnitudo* (A) *ad minorem* (B).

a 3 *hujus.* b 13. 6. c 4 *hujus;* d *cor.* 20. 6.

[a]Fiat linea X. Z ⊐ A. B; & inter X ac Z reperiatur media proportionalis Y; [c] tum circulo dato inscribatur polygonum, aliúdque circumscribatur, ita ut hujus latus L M ad illius latus D H minorem habeat rationem, quàm X ad Y. Dico factum. Nam ratio L M ad D H duplicata [d] (hoc est ratio figuræ circumscriptæ ad inscriptam) minor

minor eſt ratione X ad Y duplicatâ, hoc eſt ratione X ad Z; quæ mi- *conſt.*
nor eſt ratione A ad B. ergo factum.

Corollarium. Prop. VII.

Quin ſimiliter demonſtremus, quòd duabus inæqualibus magnitudinibus datis, & ſectore, poſſit circa ſectorem polygonum deſcribi, & aliud ei ſimile inſcribi, ita ut circumſcriptum ad inſcriptum minorem rationem habeat, quàm major magnitudo ad minorem.

Lemma. Prop. VIII.

Manifeſtum & hoc, quòd, ſi detur circulus vel ſector, & ſpatium aliquod, poſſint circulo vel ſectori polygona æquilatera inſcribendo, & adhuc continuò reliquis ſegmentis, ſupereſſe quædam ſegmenta circuli vel ſectoris, quæ minora ſint propoſito ſpatio.

* Hæc enim tradita ſunt in Elementis. * *vid.* 2. 12.

Prop. IX.

Eſt autem demonſtrandum quòd & circulo dato (vel ſectore) (A) *&* * *hoc eſt exceſſus polygoni ſupra circulum.*
ſpatio (B) *poſſit circumſcribi polygonum circulo (vel ſectori), * ita ut relicta à circumſcriptione ſegmenta minora ſint dato ſpatio.*

a Circulo figura circumſcribatur, quam voca C; & alia inſcriba- a 6 *hujus.*
tur, quæ vocetur I, ſic ut C. I ⊐ A + B. A. Dico factum. Nam ob b 9. *ax.* 1.
A b ⊏ I; c erit C. A ⊐ (C. I d ⊐) A + B. A. unde dividendo c 8. 5.
C — A. A ⊐ B. A. c adeóque C — A ⊐ B. ergo factum. d *conſt.*
e 10. 5.

Prop. X.

Si cono Iſoſceli (V A X B Y C Z) *inſcribatur pyramis* (V A B C) Fig. 12 & 13.
æquilateram habens baſim (A B C), *ſuperficies ejus, excepta baſe, æquatur triangulo* (M N O), *habenti quidem baſin* (N O) *æqualem perimetro baſis* (A B C), *altitudinem verò* (M N) *perpendiculari* (V D) *demiſſæ à vertice* (V) *ad baſis unum latus* (A B).

Nam ducantur V E, V F etiam lateribus B C, C A perpendicula- a *hypoth.*
res, & quia triangula A V B, B V C, C V A ſibi mutuò a æquilatera
ſunt, *erunt perpendiculares V D, V E, V F inter ſe pares. ergo tri-
angulum, cujus baſis æquatur ipſis A B, B C, C A ſimul acceptis, &
altitudo

altitudo uni perpendicularium VD, [b] æquatur triangulis AVB + BVC + CVA; [c] hoc est triangulum MNO æquatur superficiei pyramidis exceptâ basi. *Q. E. D.*

b 38. 1.
c *consb. & hyp.*

Prop. XI.

Fig. 14. *Si circa conum Isoscelem* (VDEF) *describatur pyramis* (VABC), *superficies Pyramidis demptâ basi, æquatur triangulo, habenti basin æqualem perimetro basis* ABC, *altitudinem verò coni lateri* (VD).

Sit VZ axis coni, & à centro Z ad contactum D ducatur recta ZD; & ob VZ [a] rectam plano ABC, etiam triangulum VZD plano ABC [b] rectum est: at verò tangens AD [c] perpendicularis est ipsi ZD (communi sectioni planorum VZD, ABC) [d] ergo AD perpendicularis est plano VZD, & [e] consequenter lineæ VD; ergo VD (coni latus) est altitudo trianguli VAB. Eâdemque ratione coni latus est altitudo trianguli VAC, & omnium, quibus constat lateratis coni superficies. [f] ergo triangulum, cujus basis est AB + BC + CA, altitudo latus coni, [f] æquatur triangulis coni superficiem constituentibus. *Q. E. D.*

a 18. *def.* 11.
b 18. 11.
c 18. 3.
d 4. *def.* 11.
e 3. *def.* 11.
f 38. 1.

Prop. XII.

Fig. 15. *Si in coni Isoscelis* (VAB) *circulum* (ABCD) *qui basis est coni inciderit recta* (CD) *ab ejus autem terminis ducantur rectæ* (CV, DV) *ad coni verticem* (V); *triangulum* (CVD) *ab incidente, & ad verticem ductis comprehensum, minus est coni superficie* (◡AVBD) *ductis ad verticem interceptâ.*

Bisecetur arcus CABD in E, & ducantur rectæ CE, DE, VE. liquétque triang CVE + DVE [a] ⊏ CVD; quia CE + DE [b] ⊏ CD, & altitudo communis est: sit excessus X, primò (suppone) non minor segmentis CE, DE: & quia superficies conica CVE + segm. CE [c] major est incluso triangulo CVE (communis enim terminus est subtensa CE); & similiter conica superficies DVE + segm. DE ⊏ triang DVE, erit conjunctè conica superf. CVD + segmenta CE, DE ⊏ triang CVE + DVE; magisque conica superf. CVD + X ⊏ triang. CVE + DVE [d] = triang CVD + X. unde sublato communi X, erit con. superf. CVD ⊏ triang CVD. Sin X minor sit segmentis CE, DE bisecentur arcus CE, DE, & ipsorum semisses, [e] donec residua segmenta CA, AE, DB, BE minora

a 1. 6.
b 20. 1.
c 3. *ax. huj.*
d *hyp.*
e 8 *hujus.*

nora ſint exceſſu X. tùmque ductis rectis AC, AE, AV; BD, BE, BV; [c] erit ut priùs, con. ſuperf. CVA + ſegm CA ⊏ triang CVA. [c] con. ſuperf. AVE + ſegm AE ⊏ triang AVE; adeóque conjunctè con. ſuperf. CVE + ſegm. CA, AE ⊏ triang CVA + AVE; ⊏ triang CVE. Simili ratione con. ſuperf. DVE + ſegm. DB, BE ⊏ triang DVE; conjunctéque con. ſuperficies CAVBD + ſegm. CA, AE, DB, BE ⊏ triang CVE + DVE = triang CVD + X. Unde cùm ſegm. CA + AE + DB + E ⊐ X, erit con. ſuperf. CAVBD ⊏ triang CVD. *Q.E.D.*

Ita ἡ ἀπειρίας ergò rem ex ſe ſatis claram demonſtrat *Archimedes*, & tres ſequentes non minùs ἀπορίας & ἀποσίας: nimirum abhorret is à multiplicandis extra neceſſitatem axiomatis & poſtulatis.

Prop. XIII.

Si ducantur rectæ (AC, BC) *tangentes circulum* (ADB) *qui baſis eſt coni* (VADB) *in eodem quo circulus exiſtentes plano, & ſibimet occurrentes; à contactibus verò* (A, B) *& ab occurſu* (C) *ad coni verticem* (V) *ducantur rectæ* (AV, BV, CV); *triangula* (AVC, BVC) *à tangentibus & ad coni verticem adjunctis* (*comprehenſa*) *minora ſunt coni ſuperficie abſumptâ ab ipſis.* Fig. 16.

Biſecetur arcus AB in D, & per D ducatur tangens EF, & connectantur VE, VF; [a] éſtque EC + FC ⊏ EF; quare addito communi AE + BF, erit AC + BC ⊏ AE + EF + BF. [b] Proinde triang AVC + BVC ⊏ triang AVE + BVF + EVF (quandoquidem communis eſt horum triangulorum altitudo). Sit exceſſus X, non minor ſegmentis AED, BFD: jam quia pyramidis ſuperficies EAVBF, cujus baſis eſt trapezium EABF, [c] major eſt incluſâ conicâ ſuperficie AVB, cum ſegmento ADB (communi exiſtente termino perimetro trianguli AVB); & ſubtrahendo commune ſegmentum ADB triangula AVE, EVF, BVF cum ſegmentis AED, BFD majora ſunt conicâ ſuperficie AVBD: majora igitur triangula AVE, EVF, BVF cum X majora ſunt eâdem ſuperficie; [d] hoc eſt triang AVC + BVC ⊏ con. ſuperf. AVBD. Si X minor ſit ſegmentis AED, BFD, biſecentur arcus AD, BD, ipſorum ſemiſſes, ac ita continuò [e] donec reſidua ſegmenta ALG, GKD, DMH, HNB minora evaſerint quam X. & ductis rectis AL, VK, VM, VN ſimiliter procedet demonſtratio ac in præcedenti.

a 10. 1.
b 1. 6.
c 4 *ax. huj*
d *hyp.*
e 9 *hujus.*

b 38. 1. c *conſt. & hyp.* altitudo uni perpendicularium V D, [b] æquatur triangulis A V B + B V C + C V A; [c] hoc eſt triangulum M N O æquatur ſuperficiei pyramidis exceptâ baſe. *Q. E. D.*

Prop. XI.

Fig. 14. *Si circa conum Iſoſcelem* (V D E F) *deſcribatur pyramis* (V A B C), *ſuperficies Pyramidis demptâ baſe, æquatur triangulo, habenti baſin æqualem perimetro baſis* A B C, *altitudinem verò coni lateri* (V D).

a 18. *def.* 11. b 18. 11. c 18. 3. d 4. *def.* 11. e 3. *def.* 11. Sit V Z axis coni, & à centro Z ad contactum D ducatur recta Z D; & ob V Z [a] rectam plano A B C, etiam triangulum V Z D plano A B C [b] rectum eſt: at verò tangens A D [c] perpendicularis eſt ipſi Z D (communi ſectioni planorum V Z D, A B C) [d] ergo A D perpendicularis eſt plano V Z D, & [e] conſequenter lineæ V D; ergo V D (coni latus) eſt altitudo trianguli V A B. Eâdémque ratione coni latus eſt altitudo trianguli V A C, & omnium, quibus conſtat lateratis coni ſuperficies. [f] ergo triangulum, cujus baſis eſt A B + B C + C A, altitudo latus coni, [f] æquatur triangulis coni ſuperficiem conſtituentibus. *Q. E. D.*

f 38. 1.

Prop. XII.

Fig. 15. *Si in coni Iſoſcelis* (V A B) *circulum* (A B C D) *qui baſis eſt coni inciderit recta* (C D) *ab ejus autem terminis ducantur rectæ* (C V, D V) *ad coni verticem* (V); *triangulum* (C V D) *ab incidente, & ad verticem ductis comprehenſum, minus eſt coni ſuperficie* (◡ A V B D) *ductis ad verticem interceptâ.*

Biſecetur arcus C A B D in E, & ducantur rectæ C E, D E, V E. liquétque triang C V E + D V E [a] ⊏ C V D; quia C E + D E [b] ⊏ C D, & altitudo communis eſt: ſit exceſſus X, primò (ſuppone) non minor ſegmentis C E, D E: & quia ſuperficies conica C V E + ſegm. C E [c] major eſt incluſo triangulo C V E (communis enim terminus eſt ſubtenſa C E); & ſimiliter conica ſuperficies D V E + ſegm. D E ⊏ triang D V E, erit conjunctè conica ſuperf. C V D + ſegmenta C E, D E ⊏ triang C V E + D V E; magiſque conica ſuperf. C V D + X ⊏ triang. C V E + D V E [d] = triang C V D + X. unde ſublato communi X, erit con. ſuperf. C V D ⊏ triang C V D. Sin X minor ſit ſegmentis C E, D E biſecentur arcus C E, D E, & ipſorum ſemiſſes, [e] donec reſidua ſegmenta C A, A E, D B, B E minora

a 1. 6. b 20. 1. c 3. *ax. huj.* d *hyp.* e 8 *hujus.*

nora ſint exceſſu X. tùmque ductis rectis A C, A E, A V; B D, B E, B V; [c] erit ut priùs, con. ſuperf. C V A + ſegm C A ⊏ triang C V A. & con. ſuperf. A V E + ſegm A E ⊏ triang A V E; adeóque conjunctè con. ſuperf. C V E + ſegm. C A, A E ⊏ triang C V A + A V E; ⊏ triang C V E. Simili ratione con. ſuperf. D V E + ſegm. D B, B E ⊏ triang D V E; conjunctéque con. ſuperficies C A V B D + ſegm. C A, A E, D B, B E ⊏ triang C V E + D V E [d] = triang C V D + X. Unde cùm ſegm. C A + A E + D B + B E ⊐ X, erit con. ſuperf. C A V B D ⊏ triang C V D. *Q.E.D.*

Ita τὸ ἀκειβὲς ergò rem ex ſe ſatis claram demonſtrat *Archimedes*, ut & tres ſequentes non minùs ἀποφαντικὸς & ἀποδεικτικὸς: nimirum abhorret is à multiplicandis extra neceſſitatem axiomatis & poſtulatis.

Prop. XIII.

Si ducantur rectæ (A C, B C) *tangentes circulum* (A D B) *qui baſis eſt coni* (V A D B) *in eodem quo circulus exiſtentes plano, & ſibimet occurrentes; à contactibus verò* (A, B) *& ab occurſu* (C) *ad coni verticem* (V) *ducantur rectæ* (A V, B V, C V); *triangula* (A V C, B V C) *à tangentibus & ad coni verticem adjunctis* (*comprehenſa*) *majora ſunt coni ſuperficie abſumptâ ab ipſis.* Fig. 16.

Biſecetur arcus A B in D, & per D ducatur tangens E F, & connectantur V E, V F; [a] éſtque E C + F C ⊏ E F; quare addito communi A E + B F, erit A C + B C ⊏ A E + E F + B F. [b] proinde triang A V C + B V C ⊏ triang A V E + B V F + E V F (quandoquidem communis eſt horum triangulorum altitudo). Sit exceſſus X, non minor ſegmentis A E D, B F D: jam quia pyramidica ſuperficies E A V B F, cujus baſis eſt trapezium E A B F, [c] major eſt incluſâ conicâ ſuperficie A V B, cum ſegmento A D B (communi exiſtente termino perimetro trianguli A V B); & ſubtrahendo commune ſegmentum A D B triangula A V E, E V F, B V F cum ſegmentis A E D, B F D majora ſunt conicâ ſuperficie A V B D: magis igitur triangula A V E, E V F, B V F cum X majora ſunt eâdem ſuperficie; [d] hoc eſt triang A V C + B V C ⊏ con. ſuperf. A V B D. Sin X minor ſit ſegmentis A E D, B F D, biſecentur arcus A D, B D, & ipſorum ſemiſſes, ac ita continuò [e] donec reſidua ſegmenta A L G, G K G, D M H, H N B minora evaſerint quam X. & ductis rectis V L, V K, V M, V N ſimiliter procedet demonſtratio ac in præcedenti.

a 20. 1. b 1. 6. c 4 *ax. huj* d *hyp.* e 9 *hujus.*

Prop. XIV.

Fig. 17. *Si in ſuperficie recti cylindri* (A C D B) *ſint duæ rectæ* (A C, B D), *cylindri ſuperficies* (A C F D B F A) *rectis intercepta, major eſt parallelogrammo* (A C D B) *comprehenſo rectis* (A C, B D) *in ſuperficie cylindri, & illis* (A B, C D) *quæ terminos ipſarum conjungunt.*

Biſecentur arcus A B, C D in E, F; & ducantur A E, B E, C F, D F: & ob A E + E B [a] ⊏ A B, [b] erit pgr. A E F C + B E F D ⊏ pgr A B D C (exiſtente pari omnium altitudine): ſit X exceſſus non minor primo ſegmentis A E, B E, C F, D F; jam cylindrica ſuperficies A E B D F C + ſegm. A E B, C F D [c] ⊏ pgr. A E F C, B E F D + triang. A E B, C F D (communi exiſtente termino parallelogrammo A B C D) ergo ſubtrahendo commune triang. A E B + C F D, erit cylindrica ſuperf. A E B D F C + ſegment. A E, B E, C F, D F ⊏ pgr. A E F C + B E F D [d] = pgr. A B C D + X. quare cùm X ſit æqualis, aut minor ſegmentis iſtis, liquet cylindricam ſuperficiem A E B D F C majorem eſſe pgr. A B C D.

a 20. 1. b 1 6. c 4 ax hujus. d hyp.

Sin X ſegmentis iſtis minor ſit, biſecentur arcus A E, B E, C F, D F, & ipſorum ſemiſſes, [e] donec reſidua ſegmenta A G, G E, E H, H B; C I, I F, F M, M D minora ſint ipſo X: tum ductis rectis, ut in figura, erit (ut prius) { pgr A G L C + G E F L ⊏ pgr A E F C. / pgr. B H M D + H E F M ⊏ pgr B E F D. Et quia Cylindrica ſuperf. A E B D F C + ſegm. A E B, C F D ⊏ pgr. A G L C, G E F L, B H M D, H E F M + rectilin. fig. A G E H B, C L F M D (communi exiſtente termino parallelogrammo A B D C) ergò, ſubtractis communibus iſtis figuris rectilineis, cylindrica ſuperf. A E B D F C + ſegm. A G, G E, E H &c. ⊏ pgr. A G L C, G E F L, B H M D, H E F M ⊏ pgr. A E F C + B E F D = pgr. A B D C + X. Unde cùm X ſegmentis iſtis major ſit, liquidò patet cylindricam ſuperficiem A E B D F C majorem eſſe parallelogrammo A B D C. *Q. E. D.*

e 8 hujus. *conſt.*

Prop. XV.

Fig 18. *Si in ſuperficie recti cujuſdam cylindri ſint duæ rectæ* (A C, B D) *à terminis verò rectarum ducantur quædam* (A E, B E. & C F, D F) *tangentes circulos, qui baſes ſunt cylindri, in eodem exiſtentes plano, & concurrentes; parallelogramma* (A E F C, B E F D) *comprehenſa ſubtangentibus & lateribus cylindri, majora erunt cylindri ſuperficie, interceptâ rectis* (A C, B D) *quæ ſunt in ſuperficie cylindri.*

Bi-

Biſecentur arcus AG in B, & ducatur tangens KGL; & erigantur KM, LN parallelæ axi cylindri, & connectatur MN: & liquet eſſe pgr. AEFC + BEFD ⊏ pgr. AKMC + KLNM + BLND (quia, [a]ut priùs, AE + BE ⊏ AK + KL + BL). Sit exceſſus X, non minor primò ſegmentis AKG, BLG, CMH, DNH. Et quia ſuperficies compoſita ex parallelogrammis AKMC, KLNM, BLND & trapeziis ABLK, CDNM [b]⊏ cylind ſuperf. AGBDHC + ſegm. AGB, CHD (communi exiſtente termino parallelogrammo ABDC) erunt, ſubtractis communibus ſegmentis AGB, CHD, reſidua pgr [c] AKMC. KLNM, BLND + ſegm. AKG, BLG, CMH, DHN ⊏ cylindrica ſuperfic. AGBDHC. quare magis pgr. AKMC, KLNM, BLND + X ([c]hoc eſt pgr. AEFC, BDFG) ⊏ cylind ſuperf. AGBDHC. Q.E.D.

a *in* 13 *hujus*

b 4 *ax. huj.*

c *hyp.*

Sin X minor ſit dictis ſegmentis, biſecentur arcus AG, BG, ducantúrque tangentes, [d] uſque dum ſegmenta fiant minóra quàm X; & ſimili tenore quo priùs demonſtratio progredietur.

d 9 *huj.*

Corollaria.

Hiſce verò demonſtratis, è prædictis liquet,

1. Quòd ſi cono Iſoſceli pyramis inſcribatur, pyramidis ſuperficies, excluſâ baſi, minor eſt ſuperficie coni, demptâ quoque baſi.

Nam ſingula pyramidem continentia triangula ſunt minora ſingulis ſuperficiebus conicis, quas intercipiunt & ſubtendunt. ergo illa ſimul his ſimul minora ſunt, hoc eſt ſuperficies pyramidis ſuperficie coni.

12 *hujus.*

2. Et quòd ſi cono Iſoſceli pyramis circumſcribatur, ſuperficies pyramidis, exceptâ baſi, major eſt ſuperficie coni, baſi quoque ſeclusâ.

13 *hujus.*

3. Item apparet ex oſtenſis, quòd ſi cylindro recto priſma inſcribatur, priſmatis ſuperficies è parallelogrammis compoſita minor eſt ſuperficie cylindri, ſine baſi.

Minus enim eſt ſingulum priſmatis parallelogrammum ſuperficie cylindricâ, quam abſcindit.

14 *hujus.*

4. Et quòd ſi cylindro recto priſma circumſcribatur, priſmatis ſuperficies, parallelogrammis conſtans, major eſt ſuperficie cylindri, ſepoſitâ baſi.

15 *hujus.*

Hactenus ad ſequentes demonſtrationes utilia lemmata præſtravit; ad principalia jam progreditur Theoremata.

Prop. XV I.

Fig. 19. 20.

Omnis cylindri recti ſuperficies (S), *exclusâ baſi, æqualis eſt circulo, cujus radius* (A) *proportione medius eſt inter cylindri latus* (L), *& baſis diametrum* (2 R).

Si neges, eſto primùm S ⊏ ⊙ A; & circa circulum A deſcribatur figura (quæ vocetur C), & inſcribatur ſimilis altera (quæ dicatur I) [a]ita ut C. I ⊐ S. ⊙ A. tum cylindri baſi circumſcripta concipiatur figura ſimilis ipſi C, quæ nominetur K: ejúſque perimeter dicatur P. Jam ob 2R. A [b] :: (A. L [c] ::) 2 A. 2 L; vel antecedentes dimidiando R. A :: A. 2 L. erit [d] Rq. Aq. (hoc eſt K. C) :: R. 2 L [e] :: $\frac{R}{2}$. L :: [f] $\frac{RP}{2}$. L P; ergo cùm ſitq; K = $\frac{RP}{2}$. [h] erit C = L P. [k] ergo L P. I ⊐ S. ⊙ A. atqui L P ⊙ A. [l] ⊐ L P. I. ergo magis L P. ⊙ A ⊐ S. ⊙ A. [m] unde L P ⊐ S. hoc eſt ſuperficies priſmatis ſuperſcripti minor eſt ſuperficie cylindri, contra 4 Coroll. præcedentis. ergo non eſt S ⊏ ⊙ A.

Sin dicatur S ⊐ ⊙ A, [a]fiat C. I ⊐ ⊙ A. S. & inſcripta concipiatur baſi cylindri figura ſimilis ipſi I, quæ dicatur Y, ejúſque perimeter P. tum ob Y. I :: [c] Rq. Aq [n] :: $\frac{RP}{2}$. L P; & Y [g] ⊐ $\frac{RP}{2}$, [h] erit I ⊐ L P. Verùm C. I [b] ⊐ ⊙ A. S [l] ⊐ C. S. [m] adeóque S ⊐ I. ergo magis S ⊐ L P. hoc eſt ſuperficies cylindri minor eſt inſcripti priſmatis ſuperficie, contra 3. coroll præcedentis. ergo non eſt S ⊐ A. Supereſt igitur, ut ſit S = ⊙ A. *Q. E. D.*

a 6 *hujus.*
b *hyp.*
c 15. 5.
d *cor.* 20. 6.
e 1. 12.
f 1. 6.
g
h 14. 5.
k *conſt.*
l 8. 5.
m 10. 5.
n *prius.*

Corollaria.

1. Cylindricæ ſuperficies ſuper æqualibus baſibus conſtitutæ ſe habent ut latera, vel altitudines.

2. Cylindricæ ſuperficies æquè altæ ſe habent ut diametri baſium.

3. Cylindrica ſuperficies rationem habent compoſitam è rationibus laterum & diametrorum.

4. Similes cylindricæ ſuperficies rationem habent laterum, vel diametrorum duplicatam.

5. Æqualium ſuperficierum cylindricarum latera & diametri proportione reciprocantur; & converſè, ſi reciprocentur hæc proportione, iſtæ ſunt æquales.

Cùm

Cùm enim cylindricæ ſuperficies ſe habeant ut circuli, quibus æquantur; & circuli ut quadrata radiorum; & hæc quadrata æquentur rectangulis ex latere & diametro cylindrorum; & iſta rectangula dictas habeant paſſiones (ut in elementis oſtenditur) ergo hæc patent.

Prop. XVII.

Omnis coni Iſoſcelis ſuperficies (S) *abſque baſi, æquatur circulo, cujus radius* (A) *mediam habet proportionem inter coni latus* (L) *& baſis circularis radium* (R). Fig. 21.

Si neges, ſit primò S ⊏ ⊙ A: & circulo A circumſcribatur figura C, & inſcribatur altera I [a]ſic ut C. I :: ⊐ S. ○ A; tum baſi coni circumſcribatur quoque figura ſimilis ipſi C, quæ vocetur K, ejúſque ſemi-perimeter appelletur P. Jam quia R. A [b]:: A. L. [c] erit Rq Aq. ([d]id eſt K. C) :: R. L [e] R P. L P; ergò quum ſit K = R P, [f]erit C = L P. [g] quare L P. I ⊐ S. ⊙ A. [h] ſed L P. ⊙ A ⊐ L P. I. ergo magis L P. ⊙ A ⊐ S. ⊙ A. unde L P. ⊐ S. [i]hoc eſt ſuperficies pyramidis cono circumſcriptæ conicâ ſuperficie minor eſt; contra prius oſtenſa, in 2. coroll. 15 hujus.

Sed ſecundò ſit S ⊐ ⊙ A. [k]fiátque C. I ⊐ ⊙ A. S. & coni baſi inſcribatur figura Y, ſimilis ipſi I, cujus ſemiperimeter appelletur ϖ. Jam Y. I [d] :: Rq. Aq [c] :: R. L :: [e] R ϖ. L ϖ. & [*] Y ⊐ R ϖ. unde I [f] ⊐ L ϖ. atqui C. I. ⊐ ⊙ A. S [b] ⊐ C. S. & conſequenter S [k] ⊐ I ⊐ L ϖ. [m] hoc eſt ſuperficies coni minor eſt ſuperficie pyramidis cono inſcriptæ, itidem contra demonſtrata, in 1. Coroll. 15. hujus.

a 6 *hujus.*
b *hyp.*
c *cor.* 20. 5.
d 1. 12.
e 1. 6.
* *
f 14. 5.
g *hyp.*
h 8. 5.
k 10. 5.
l 11. *hujus.*
m 10 *hujus.*

Corollaria.

1. Conicæ ſuperficies ad æquales Baſes poſitæ ſunt ut diametri baſium.

2. Conicæ ſuperficies æquè altæ, vel æqualia latera habentes ſunt ut diametri baſium.

3. Conicæ ſuperficies rationem habent compoſitam è rationibus laterum & diametrorum.

4. Similes conicæ ſuperficies habent duplicatam laterum vel diametrorum rationem.

5. Æquales conicæ ſuperficies quoad latera & diametros proportione reciprocantur; & converſè.

Prop.

Prop. XVIII.

Fig. 22. *Omnis coni Iſoſcelis ſuperficies* (S) *eandem ad baſin rationem habet, quam coni latus* (L) *ad baſis radium* (R).

a 1.6.
b cor. 2. 12.
c 17 *hujus.*

Nam L. R [a] :: (L R. Rq [b] :: ⊙ rad. √ L R. ⊙ R. ([c] hoc eſt ::) S. ⊙ R. *Q.E.D.*

Prop. XIX.

Not. *in hoc & ſequentibus triangula conos repræſentantia cenſentur per axes trajecta.*

Si conus Iſoſceles (A B C) *ſecetur plano* (D Q E) *baſi* (B P C) *parallelo, parallelis planis interceptæ coni ſuperficiei* (D B C E) *æquatur circulus, cujus radius* (Z) *mediam habet proportionem inter coni latus* (D B) *parallelis planis interjectum, & æqualem utrique radio* (F B + G D) *circulorum* (B P C, D Q E) *qui in parallelis ſunt planis.*

Fig. 23. 24. Nam ob D B. Z [a] :: Z. B F + D G, [b] erit Zq = D B ✕ : B F + D G = A B — A D ✕ : B F + D G [c] = A B ✕ B F + A B + D G — A D ✕ B F — A D ✕ D G = A B ✕ B F — A D ✕ D G (eſt enim A B ✕ D G [d] = A D ✕ B F, ob A B. B F [e] :: A D. D G). [f] ergo ⊙ rad Z = ⊙ rad √ A B ✕ B F — ⊙ rad A D ✕ D G. Verum ⊙ rad √ A B ✕ B F [g] = ſuperf. A B C; & ⊙ rad √ A D ✕ D G [g] = ſuperf. A D E. ergo ⊙ rad Z æquatur ſuperficiei D B C E. *Quod E.D.*

a *hyp.*
b 17. 6.
c *ſch.* 1. 2.
d 16. 6.
e 4. 6.
f cor. 2. 12.
g 17. *hujus.*

Coroll. Hinc ſi recta Y X biſecet latera D B, E C; erit circulus radio √ D B ✕ Y X æqualis ſuperficiei conicæ D B C E.

Fig. 25. Nam ductis rectis Y G, B E, F X; ob D G = $\frac{D E}{2}$ & D Y = $\frac{D B}{2}$ erunt Y G, B E parallelæ; ergo in pgr. G Y U E eſt Y V = G E. Simili diſcurſu eſt V X = B F. unde Y X = G E + B F.

Prop. XX.

Fig. 26. *Si duo ſint coni Iſoſceles* (B A C, X Z), *& unius ſuperficies* (B A C) *æqualis ſit alterius baſi* (Z); *& quæ à baſis centro* (D) *ad coni latus* (A C) *ducitur perpendicularis* (D E) *altitudini* (X) *æquetur; æquales erunt coni* (B A C, X Z).

a *hyp.*
b 7. 5.
c 4. 6.
d 18 *hujus.*
e 7. 5. & *hyp.*
f 11. 5.

Nam ductâ A D, ob X = [a] D E, erit A D. X [b] :: A D. D E [c] :: A C. C D (ſunt enim ſimilia triangula rectangula A D E, A C D) [d] :: ſuperf. B A C. baſ. B F C [e] :: Z. baſ. B F C [f] :: A D. X. Itaque cum

cùm reciprocentur proportione baſes & altitudines conorum B A C, Z X, ii ſunt æquales. *Q.E.D.* g 15. 12.

Prop. XXI.

Omni Rhombo (G A H D) *ex Iſoſcelibus conis* (G A A, G D H) *compoſito, æquatur conus* (X Z) *habens quidem baſin* (Z) *æqualem ſuperficiei unius coni* (G A H) *eorum qui Rhombum continent, altitudinem verò* (X) *æqualem perpendiculari* (D E) *ductæ à vertice* (D) *alterius coni* (G D H) *ad prioris coni latus unum* (A H). Fig. 27. 28.

Nam ob X [a]=D E, eſt A D. X [b] :: A D. D E [c] :: A H. K H [d] :: ſuperf. G A H. baſ. G L H [e] :: Z. baſ G L H. quare conus cujus altitudo [f] æquatur rectæ A D, & baſis circulo G L H æquatur cono X Z (ob reciprocam nempe proportionem A D. X :: Z. G L H). atqui conus altitudine A D, baſis G L H æquatur Rhombo A G D H (nam con G D H. con G A H [g] :: D K. A K; & componendo Rhomb A G D H. con G A H :: A D. A K [g] :: con { alt A D. / baſ G L H. } con G A H.)

[h]ergo Rhombus A G D H æquatur cono X Z. *Q.E.D.*

a *hyp.* b 7. 5. c 4. 6. d 18 *hujus.* e *hyp.* & 7. 5. f 15. 12. g 14. 12. h 1. *ax.* 1.

Prop. XXII.

Si conus Iſoſceles (B A C) *ſecetur plano* (G H) *baſi* (B C) *parallelo, à circulo verò facto* (G H) *deſcribatur conus* (G D H) *verticem habens baſis centrum* (D): *factus autem Rhombus* (G A H D) *auferatur à toto cono* (B A C), *reſiduo æquatur conus* (X Z), *habens quidem baſin* (Z) *æqualem ſuperficiei conicæ* (G B C H) *parallelis planis interceptæ; altitudinem verò* (X) *æqualem perpendiculari* (D E) *ductæ à baſis centro* (D) *ad coni latus unum* (A C). Fig. 29.

Conus enim, cujus altitudo eſt D E, & baſis æqualis ſuperficiei G B C H [a] æquatur differentiæ duorum conorum habentium eandem altitudinem D E, & baſes æquales ſuperficiebus A B C, A G H, hoc eſt differentiæ coni A B C, & Rhombi A G D H (per duas præcedentes). quare conus X Z iſti differentiæ æquatur. *Q.E.D.* a 11. 12.

Prop.

Prop. XXIII.

Fig. 30. *Si Rhombi* (G A H D) *ex Isoscelibus conis* (G A H, G D H) *compositi unus conus* (A G H) *secetur plano* (M N) *basi* (G H) *parallelo; à facto autem circulo* (M N) *describatur conus* (M D N) *habens verticem* (D) *eundem cum altero cono* (G D H), *ab integro verò Rhombo* (G A H D) *auferatur effectus Rhombus* (M A N D), *residuo æquatur conus* (X Z) *habens quidem basin* (Z) *æqualem conicæ superficiei* (M G H N) *parallelis planis* (M N, G H) *interceptæ, altitudinem verò* (X) *perpendiculari* (D E) *ductæ à vertice* (D) *alterius coni* (G D H) *ad latus* (A H) *reliqui coni* (G A H).

11. 12. Conus enim, cujus altitudo æqualis est ipsi D E & basis superficiei conicæ M G H N, æquatur differentiæ duorum conorum habentium eandem altitudinem (D E), ac bases æquales superficiebus conicis
* 21 *hujus.* A G H, A M N, *id est differentiæ Rhomborum A G D H, A M D N. ergo conus X Z isti differentiæ exæquatur. *Q. E. D.*

Prop. XXIV.

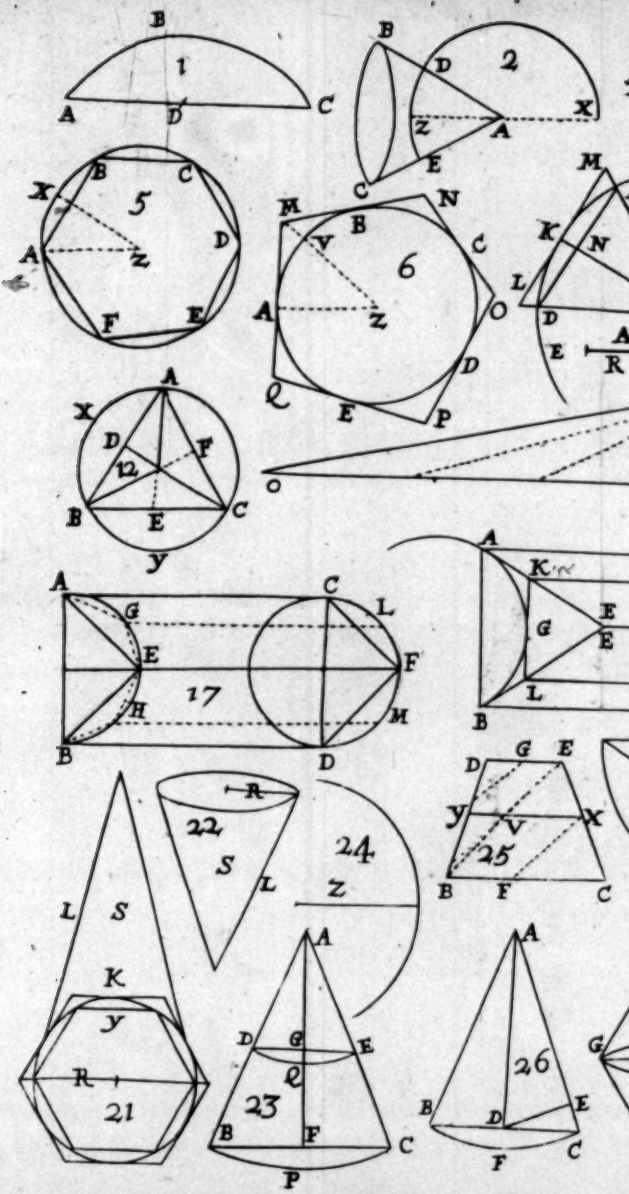
Fig. 31. *Si circulo* A B C D) *inscribatur polygonum* * *parilaterum simul ac*
* ἀρτιόπλευρον. *æquilaterum* (A E B F C G D H), *& agantur rectæ* (E H, B D, F G) *polygoni latera conjungentes, quæ parallelæ sint uni cuivis* (E H) *duo polygoni latera subtendentium, omnes conjunctæ* (E H + B D + F G) *ad circuli diametrum* (A C) *illam rationem habent, quam habet dimidia præter unum subtendens* (C E) *ad polygoni latus* (A E).

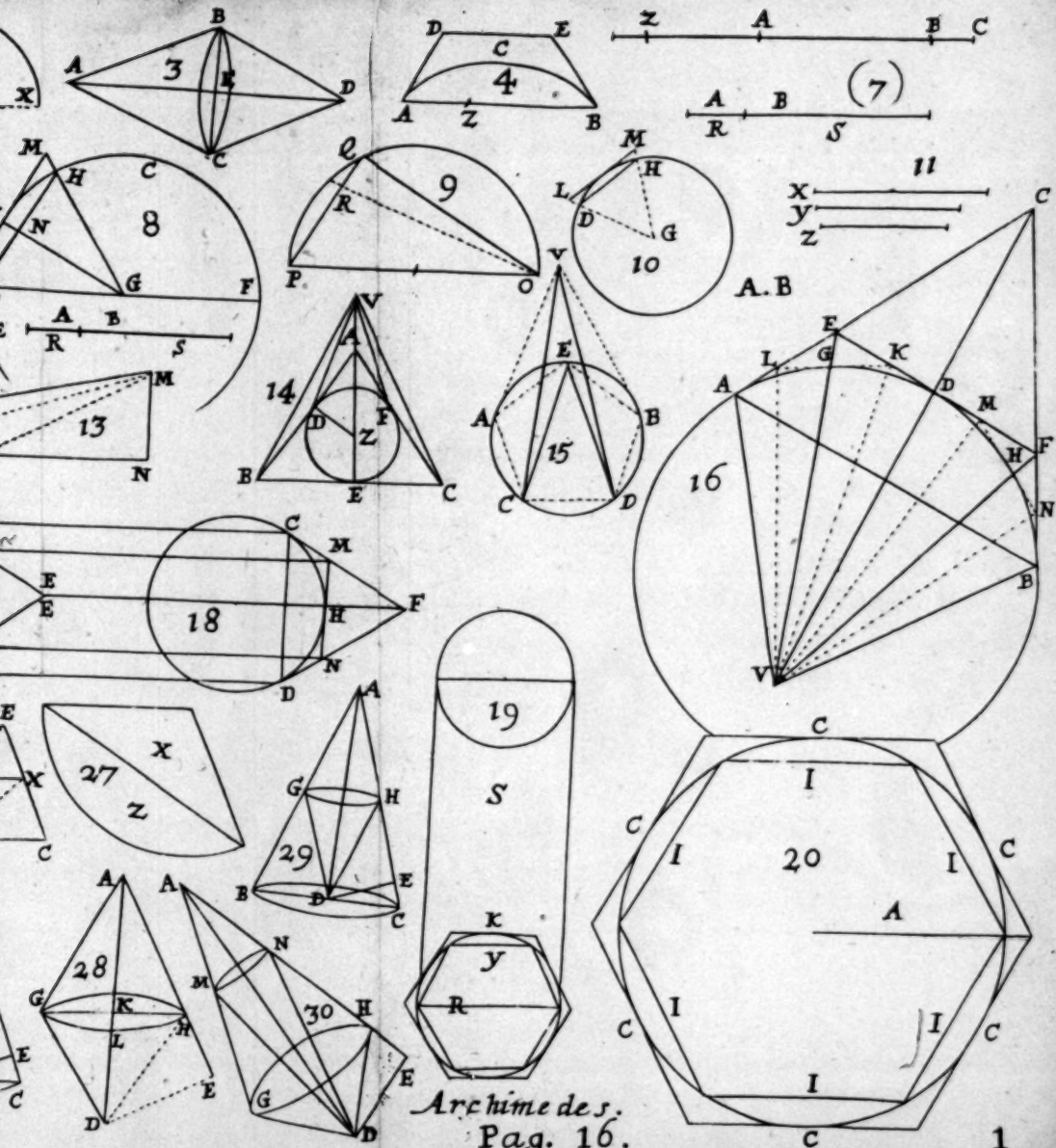
Ducantur enim rectæ H B. D F. Et quoniam anguli A C E, A E H, E H B, H B D, B D F, D F G, F G C, æqualibus insistentes arcubus,
a 27. 3. [a]æquales sunt, liquet triangula rectangula C E A, E I A, H I K, B L K,
b 4. 6. D L M, F N M, G N C esse similia; [b]adeóque esse C E. E A ::
c 12. 5. E I. I A :: H I. I K :: B L. L K :: D L. L M :: F N. N M :: G N. N C.
[c]quare ut C E ad E A, sic antecedentes conjunctim E H + B D + F G ad consequentes simul, hoc est ad totam diametrum A C: *Q. E. D.*

Coroll.

* 16. 6. C E × A C * = E A × : E H + B D + F G.

Prop.


1
2
5
6
12
17
21
22
23
24
25
26


3
4
(7)
8
9
10
11
A.B
13
14
15
16
18
19
S
20
27
28
29
30
Archimedes.
Pag. 16.
1

Prop. XXV.

Si circuli segmento (F A G) *inscribatur polygonum* (FBEAHDG) *latera habens, exceptâ base, æqualia, & numero paria; ducantur verò rectæ* (E H, B D) *parallelæ basi, connectentes latera polygoni, omnes ductæ cum dimidia base* (E H + B D + F N) *ad segmenti altitudinem* (A N) *eandem habent rationem, quam habet illa* (C E), *quæ à diametro circuli ad polygoni latus ducitur, ad polygoni latus* (A E). Fig. 31.

Nam, prorsus ut in præcedenti, est C E. E A :: E I. A I :: H I. I K :: B L. L K :: D L. L M :: F N. M N [a] :: E H + B D + F N. A N :: C E. E A. *Q.E.D.* [a] 12. 5. * 16. 6.

Coroll. *A N * C E = E A *: E H + B D + F N.

Prop. XXVI.

Sit in sphæra maximus circulus A B G D, eique inscribatur polygonum æquilaterum, multitudo autem laterum ipsius mensuretur à quaternario; sint verò A G, B D diametri: quòd si manente diametro A G circumvolvatur circulus A B G D, polygonum continens; liquet quòd peripheria ejus secundùm sphæræ superficiem feretur. Anguli verò polygoni, præter eos qui ad puncta A, G secundùm peripherias ferentur circulorum in sphæræ superficie descriptorum, & rectorum circulo A G B D. Diametri autem ipsorum erunt rectæ polygoni angulos conjungentes, ad B D parallelæ. Ast polygoni latera secundùm conos quosdam ferentur; nempe A Z, A N secundùm superficiem coni, cujus quidem basis erit circulus circa diametrum Z N, vertex autem punctum A. Sed H Z, M N secundùm superficiem quandam conicam ferentur, cujus quidem basis est circulus circa diametrum H M, vertex verò punctum, in quo occurrent productæ H Z, M N sibi mutuò & ipsi G A. Quinetiam H B, M D ferentur juxta conicam superficiem, cujus basis est circulus circa diametrum B D ad circulum A B G D rectus, vertex autem punctum in quo conveniunt B H, D M, secum invicem, & cum recta G A. Haud absimiliter in altero semicirculo, latera secundùm superficies conicas deferentur, itidem hisce consimiles. Ita quidem inscripta erit sphæræ figurâ quædam prædictis superficiebus conicis comprehensa, cujus superficies minor erit superficie sphæræ. Divisâ enim sphærâ plano per BD recto ad circulum A B G D, superficies alterius hemisphærii, & su- Fig. 32. 4 nx. huj.

perficies inſcriptæ ipſi figuræ eoſdem terminos habent in eodem plano; nam utriuſque ſuperficiei terminus eſt ſuperficies circuli, qui circa diametrum BD circulo ABGD rectus; ſúntque ambæ ad eaſdem partes cavæ, atque ipſarum una ſuperficies comprehenditur ab altera, ac plano habenti eoſdem cum ipſo terminos. Haud aliter ſuperficies figuræ in altero hæmiſphærio minor eſt ſuperficie hemiſphærii: tota igitur ſuperficies figuræ, quæ in ſphæra, minor eſt ſuperficie ſphæræ.

Prop. XXVII.

Fig 31. *In ſphæram inſcriptæ figuræ* (AEBFCGDH) *ſuperficies æquatur circulo, cujus radius poteſt rectangulum comprehenſum ſub figuræ latere* AE, *& rectâ* (EH + BD + FG) *æquali omnibus lateribus figuræ conjungentibus, parallelíſque duo figuræ latera ſubtendenti* (EH).

Nam ⊙ rad √ AE * $\frac{EH}{2}$ [a] = ſuperf conica EAH. [b] quare ⊙ rad √ AE * EH = 2 ſuperf. EAH. Item (ſimili pacto) ⊙ rad √ BE *: AE. BD + EH [c] = 2 ſuperf. BEHD. [d] ergo ⊙ rad √. AE *: EH + BD + FG = 2 ſuperf. EAH + BEHD = ſuperf. AEBFCGDHA.

a 17. *hujus.*
b *cor.* 2. 12.
c 19 *hujus.*
d 3. *ax.* 1.

Coroll. * Hinc ⊙ rad √ AC * CE = fig AEBFCGDHA.

* *hæc, & cor.* 24. *hujus.*

Prop. XXVIII.

In ſphæram inſcriptæ figuræ ſuperficies (I) *conicis ſuperficiebus contenta, minor eſt quàm quadrupla maximi circuli* (ABCD) *eorum qui ſunt in ſphæra.*

Nam ſuperf. I [a] = ⊙ rad √ AC * CE ⊐ ⊙ rad AC [b] = 4 ⊙ rad AL.

a *coroll.* 27 *b.*
b *cor.* 2. 12.

Prop. XXIX.

Fig. 33. *In ſphæram inſcriptæ figuræ* (AFHDCBGE) *ſuperficiebus conicis contentæ, æqualis eſt conus* (K) *baſin quidem habens circulum æqualem ſuperficiei figuræ inſcriptæ in ſphæram, altitudinem verò æqualem perpendiculari* (XZ) *à ſphæræ centro* (Z) *in polygoni latus unum ductæ.*

Ducantur radii XE, XF, XG, XH, & connectantur anguli ab A utrinque aq. è remoti rectis EF, GH. Eſtque Rhombo EXFA

[a] æqualis

[a]æqualis conus baſe conicâ ſuperficie E A F, altitudine X Z. Item, productis G E, H F ad Q; ſi ex Rhombo G X H Q ſubducatur Rhombus E X F Q, reſiduo E G X H F [b]æquabitur conus baſe ſuperficie conicâ E G H F, altitudine quoque X Z. Similiter, productis B G, D H ad P, ſi ex cono B P D ſubtrahatur Rhombus G X H P, reſiduo G B X D H [c] æqualis erit conus, cujus baſis æquatur conicæ ſuperficiei B G H D, altitudo rurſus ipſi Z X. Idem erit in reliquo hemiſphærio B C D. ergo cùm hiſce conis omnibus [d] æquetur conus K; is ſolido quoque inſcripto æquabitur. *Q. E. D.*

[a] 21 *hujus.*
[b] 23 *hujus.*
[c] 22 *hujus.*
[d] 11. 12.

Prop. XXX.

Inſcripta ſphæræ figura conicis ſuperficiebus contenta minor eſt quàm quadrupla coni (M) *baſin quidem habentis æqualem maximo circulo eorum qui in ſphæra, altitudinem verò æqualem radio ſphæræ.*

Nam coni K, in præcedente, [a] baſis minor eſt quàm quadrupla circuli maximi, & ejus quoque altitudo X Z minor radio ſphæræ; ergo quadruplus coni M major eſt iſto cono K; hoc eſt figurâ inſcriptâ. *Q. E. D.*

[a] *hyp.* & 29. *h.* 11, 12.

Prop. XXXI.

Sit in ſphæra maximus circulus A B G D. Circa verò circulum A B G D deſcribatur polygonum æquiangulum & æquilaterum; multitudo autem laterum ipſius menſuretur à quaternario. Circulo autem circumſcriptum polygonum comprehendat circulus circumſcriptus E Z H T, circa idem centrum exiſtens ac A B G D. Manente verò E H circumvolvatur planum E Z H T, in quo polygonum & circulus. Liquet igitur quòd quidem peripheria circuli A B G D ſecundùm ſphæræ ſuperficiem deferetur, ipſius autem E Z H T peripheria ſecundùm ſuperficiem alterius ſphæræ minori concentricæ feretur: contactus autem, ad quos latera tangunt circulos deſcribunt rectos circulo A B G D in minori ſphæra. Anguli vero polygoni, præter illos qui ad puncta E, H, ſecundum peripherias circulorum feruntur in majoris ſphæræ ſuperficie deſcriptorum, ad circulum E Z H T rectorum; verùm latera polygoni ſecundum conicas ſuperficies, utique ſicut in præcedentibus. Erit igitur figura comprehenſa à ſuperficiebus conicis, minori ſphæræ circumſcripta, majori verò inſcripta. Quòd autem circumſcriptæ figuræ ſuperficies major ſit ſuperficie ſphæræ, ſic oſtendetur. Eſto enim K D diameter alicujus circuli eorum, qui in minori ſunt ſphæra, exiſtenti-

Fig. 34.

bus K, D punctis ad quæ duo latera circumſcripti polygoni tangunt circulum A B G D; divisâ nempe ſphærâ plano per K D ad circulum A B G D recto, etiam ſuperficies deſcriptæ circa ſphæram figuræ dividetur à plano: utriuſque enim ſuperficiei terminus eſt circumferentia circuli, qui eſt ſuper diametrum K D ad circulum A B G D rectus; ſúntque ambæ ad eaſdem partes cavæ, & earum altera continetur ab altera ſuperficie, ac plano eoſdem terminos habenti. Minor
4 *ax. hujus.* igitur eſt comprehenſa portionis ſphæricæ ſuperficies ſuperficie figuræ circa ipſam deſcriptæ. Similiter & reliquæ portionis ſphæricæ ſuperficies minor eſt ſuperficie figuræ ipſi circumſcriptæ. Patet igitur quod tota ſuperficies ſphæræ minor eſt ſuperficie figuræ circa ipſam deſcriptæ.

Prop. XXXII.

Fig. 35. *Superficies deſcriptæ circa ſphæram figuræ* (E F G H I K L M) *æqualis eſt circulus, cujus radius poteſt æquale rectangulo comprehenſo ſub polygoni uno latere* (E F), *& rectæ æquali omnibus polygoni angulos connectentibus* (F M + G L + H K), *parallelis alicui* (F M) *ſubtendentium polygoni latera.*

Centro enim N (quod ſphæræ centrum eſt) per angulos polygoni deſcribatur circulus: huic inſcripta eſt figura E F G H I K L M. Ergo patet res ex 27 hujus.

Coroll. Ductâ F L eſt ⊙ rad. $\sqrt{FL \times GL}$ = ſuper. EFGHIKLM. ibid.

Prop. XXXIII.

Figuræ circa ſphæram deſcriptæ ſuperficies major eſt quàm quadrupla maximi in ſphæra circuli (A B C D).

a *cor.* 15. 1. b *hyp.* c 34. 1. d 47. 1. e *cor.* 27 *huj.* f *cor.* 2. 12. & 4. 2.

Nam (in figura præcedenti) à centro N ad contactus oppoſitos O, P ducantur rectæ N O, N P (ª quæ quidem in directum jacent, ob angulos G N O, L N P ᵇ æquales); connexâ vero F L, ſunt F L. O P ᶜ pares (ob O F, P L ᵇ parallelas ac pares) quare cùm G L ᵈ ⊏ F L, erit $\sqrt{GL \times FL} \sqsubset OP$. adeóque circulus radio $\sqrt{GL \times FL}$ (ᵉ hoc eſt ſuperficies figuræ E F G H I K L M) major eſt circulo cujus radius O P, ᶠ hoc eſt quadruplo circuli cujus radius N O, hoc eſt quadruplo A B C D. *Q.E.D.*

Coroll. Nota eſſe L F, P O pares.

Prop.

Prop. XXXIV.

Circa minorem ſphæram (A B C D) *deſcriptæ figuræ æqualis eſt conus, baſim quidem habens circulum æqualem ſuperficiei ipſius figuræ, altitudinem verò æqualem radio ſphæræ.*

Nam figuræ iſti circumſcribendo circulum E G I L, patet ex 29. hujus.

Prop. XXXV. Coroll.

Figura ſphæræ minori circumſcripta major eſt quàm quadrupla coni, baſin quidem habentis maximum in ſphæra circulum, altitudinem verò radium ſphæræ.

Patet conferendo duas proximè antecedentes.

Prop. XXXVI.

Si ſphæræ inſcripta ſit figura (A N B C D), *& alia circumſcripta* (E F G I L) *ſub ſimilibus polygonis, ad eundem modum quo priùs conſtructis circumſcriptæ figuræ ſuperficies, ad ſuperficiem inſcriptæ, duplicatam rationem habet ejus, quam latus* (G F) *circumſcripti maximo circulo polygoni, ad latus* (B N) *polygoni eidem circulo inſcripti. Ipſa verò figura circumſcripta, ad figuram inſcriptam, rationem habet ejuſdem rationis triplicatam.* Fig. 36.

Nam 1° ductis D N, L F, ob ſimilitudinem figurarum eſt angulus G L F æqualis angulo B D N. adeóque rectangula triangula G L F, B D N ſunt ſimilia. & G L. L F [a]:: B D. D N. Eſt autem G Lq. G L × L F [b]:: G L. L F [a]:: B D. D N [b]:: B Dq. B D × D N. & permutando G Lq. B Dq ([c]hoc eſt G L. B D, bis, [a] vel G F. B N, bis) :: G L × L F. B D × D N [d]:: ⊙ rad √ G L × L F. ⊙ rad √ B B × D N ([e]hoc eſt) :: ſuperf. E F G I L. ſuperf. A N B C D. *Q.E.D.*

a 4. 6.
b 1. 6.
c 20. 6.
d *cor.* 2. 12.
e *ſch.* 7. 5. & *cor.* 27 *hujus.*

2. Ducatur Z O, à centro Z ad tactum O. Eſtque conus, [f] cujus baſis eſt ⊙ rad √ G L × L F, & altitudo Z O, [g] æqualis corpori circumſcripto. [h] Conus autem baſe ⊙ rad √ B D × D N, altitudine Z P, æquatur corpori inſcripto. Hi coni [i] ſimiles ſunt, (quia Z O. Z P [k] :: G O. B P [k] :: G F. B N :: [l] √ G L × L F. √ B D × D N.) ergo ſunt hi coni (hoc eſt iſta corpora) in triplicata ratione ipſarum Z O, Z P, vel G F, B N. *Q.E.D.*

f 34 *hujus.*
g 29 *hujus.*
h 24. *def.* 11.
k 15. 5.
l *priùs & 22. 6.*
m 12. 12. & 15. 5.

Prop.

Prop. XXXVII.

Fig. 37.

Omnis ſphæra ſuperficies (S) *quadrupla eſt maximi circuli, eorum qui ſunt in ſphæra.*

Circulus maximi in ſphæra circuli quadruplus dicatur X: & primò ſi fieri poteſt, ſit X ⊐ S. Fiat autem, utcunque G. H [a] ⊐ S. X. & ſphæræ circumſcribantur ac inſcribantur figuræ, (quales innuunt præcedentia) ſic ut [b] latus D E. B C ⊐ G. √ G H. Harum verò figurarum ſuperficies appellentur Y, Z. Eſtque S. Z [c] ⊐ Y. Z. [d] = D E. B C, bis [c] ⊐ G. √ G H bis [f] = G. H [g] ⊐ S. X. [h] ergo Z ⊏ X. hoc eſt inſcriptæ figuræ ſuperficies major eſt quadruplo maximi in ſphæra circuli, contra 2 8 hujus.

Sin verò dicatur X ⊏ S. fiat G. H [a] ⊐ X. S. ac D E. B C [b] ⊐ G. √ G H. eſtque Y. S [g] ⊐ Y. Z * ⊐ G. H [g] ⊐ X.S. [h] unde Y ⊐ X; hoc eſt circumſcriptæ figuræ ſuperficies minor eſt quadruplo maximi in ſphæra circuli, contra 31 hujus. Reſtat igitur, ut ſit X = S. *Q.E.D.*

a 3 *hujus.*
b 4 *hujus.*
c 8. 5. & 31 *b.*
d 36 *hujus.*
e *conſt.*
f 17. 6.
g *conſt.*
h 10. 5.
* *ut prius.*
k 26 *hujus.* & 8. 5.

Hoc nobiliſſimum Theorema (cum eo, quo univerſale redditur, ſubſequente ad Prop. XLIX.) inter *Archimedis* (dicam, an omnia quotquot fuerunt Geometrarum) inventa familiam ducit, cùm inveniendi ſubtilitate, tum rei elegantiâ, ſed & utilitate diffusâ.

Coroll. Circulus, cujus radius æquatur diametro ſphæræ, adæquat ſphæræ ſuperficiem.

Lemma. Sint duæ quæcunque rectæ L, M; oportet invenire alteram N, ita ut ſit L. M ⊏ L. N, ter. Fiat L. P :: P. M. & L. N :: N. P. Erit L. M = L. P, bis = L. N quater ⊏ L. N, ter.

Prop. XXXVIII.

Omnis ſphæra (A) *quadrupla eſt coni* (K) *baſim quidem habentis æqualem maximo circulo eorum qui in ſphæra, altitudinem verò radium ſphæræ*

Si fieri poteſt, ſit primùm A ⊏ 4 K. Fiat A. 4 K [a] ⊏ L. M [b] ⊏ L. N, ter: tum figuræ circumſcribantur & inſcribantur (quæ vocentur Y, Z) ita ut latus D E. B C [c] ⊐ L. N. Eſtque A. Z [d] ⊐ Y. Z [c] = D E. B C, ter [g] ⊐ L.N, ter [g] ⊐ L. M [g] ⊐ A. 4 K. [b] ergo Z ⊏ 4 K. contra 30 hujus.

a 3 *hujus.*
b *Lemma præced.*
c 4 *hujus.*
d 8. 5.
e 36 *hujus.*
g *conſt.*
h 10. 5.
* *prius.*

Sin dicas eſſe 4 K ⊏ A. ſit 4 K. A [a] ⊏ L. M [b] ⊏ L N, ter. & DE. B C [c] ⊐ L. N. tum erit Y. A. ⊐ [d] Y. Z * ⊐ L. M. [g] ⊐ 4 K. A. quare

[h]quare Y ⊐ 4 K. contra 35 hujus. Ergo potiùs est sphæra A = 4 K. *Q. E. D.*

Coroll. Hemisphærium æquatur duplo cono ad eandem basin & æquè sibi alto; vel cono ad eandem basin & altiudinem habenti duplam.

Prop. XXXIX. Coroll.

Hisce verò præmonstratis liquet, quòd omnis cylindrus (A B C D) *basim quidem habens maximum in sphæra circulum* (A B), *altitudinem verò* (A D) *æqualem diametro sphæræ, sesquialter est sphæræ* (FGHK); *& quòd superficies istius cylindri cum basibus sesquialtera quoque est superficiei sphæræ.* Fig. 38.

Nam per E (sphæræ centrum) ductâ F H ad A B parallelâ, & junctis E A, E B; est

1. $\frac{1}{6}$ Cyl A B C D [a] = $\frac{1}{3}$ Cyl A B H F [b] = con A E B [c] = $\frac{1}{4}$ sph. F G H K. [d] ergo Cyl A B C D. Sph F G H K :: 6. 4 :: 3. 2.

2. Superf. cyl A B C D [a] = ⊙ rad √ A D × D B = ⊙ rad A B [f] = 4 ⊙ F G H K [g] = superf. sphæræ. ergo superf A B C D + 2 ⊙ F G H K. superf. sphæræ :: 6. 4 :: 3. 2.

a 14. 12.
b 10. 12.
c 38 *hujus.*
d *sch.* 15. 5.
e 16 *hujus.*
f 4. 2. & 2 *cor.* 12.
g 37 *hujus.*

Prop. XL.

Secetur sphæra plano non per centrum, sitque in ipsa maximus circulus A E Z secans perpendiculariter planum secans. Inscribatur autem portioni A B C polygonum æquilaterum, & parilaterum, exceptâ base A B. Haud absimiliter ac antehac, si manente G Z circumducatur figura, anguli quidem D, E, A, B ferentur secundùm circulos, quorum diametri D E, A B; latera verò *figuræ secundùm conicas superficies; eritque facta figura solida conicis superficiebus comprehensa, basin quidem habens circulum, cujus diameter A B, *verticem autem C: quinimò ut in præcedentibus, superficiem habebit minorem superficie portionis comprehendentis. Siquidem tam portionis quàm figuræ idem in plano terminus est circumferentia circuli, cujus diameter A B, & ad easdem cavæ sunt ambæ superficies, & una ab altera comprehenditur. Fig. 39.

*lego σχήματος pro τμήματος.
*lego κορυφὴν pro κορυφὴ.
ax. 4 *hujus.*

Prop. XLI.

Superficies inscriptæ in sphæræ portionem figuræ (A D F B G E C) *æqualis est circulo, cujus radius potest æquale rectangulo comprehenso sub uno latere* (B F) *polygoni in maximi circuli segmentum* (A B C) *inscripti,* Fig. 40.

inſcripti, & recta (F G + D E + A K) *æquali omnibus ad ſegmenti baſin* (A C) *parallelis, cum ſemiſſe diametri baſis.*

a 17 *hujus.* Nam ⊙ rad √ B F × F H [a] = ſuperf con F B G & ⊙ rad · √ DF/BF

b 19 *hujus.* × : H G + D I [b] = ſuperf. D F G E. Item ○ rad √ DA/BF × : I E + A K [b] = ſuperf A D E C. [c] ergo conjunctè ⊙ rad √ B F × : F G + D E + A K = ſuperf F B G + D F G E + A D E C = ſuperf A D F B G E C. *Q.E.D.*

c { 1. 2. cor. 2. 12. 1. ax. 1.

Coroll. Ductâ L F, erit ⊙ rad √ B K × L F = ſuperf A D F B G E C.

d *cor.* 25 *huj.* Nam B F × : F G + D E + A K [d] = B K × L F.

Prop. XLII.

Sphæræ portioni inſcriptæ figuræ ſuperficies (S) *minor eſt circulo, cujus radius æquatur ductæ* (B A) *à portionis vertice* (B) *in circumferentiam circuli* (A C) *qui baſis eſt coni.*

a *cor.* 8. 6. & 17. 6. Nam B K × L F ⊐ B K × L B [a] = B Aq. [b] ergo ⊙ rad B K × L F ([c] hoc eſt S) ⊐ ⊙ rad A B.

b *cor.* 2. 12.

c *cor. præc.*

Prop. XLIII.

Fig. 41. *Portioni inſcripta figura* (A D B E C) *conicis ſuperficiebus contenta cum cono* (A F C) *baſin quidem eandem habente cum figura, verticem verò ſphæræ centrum* (F), *æquale eſt cono* (K) *baſin habenti parem ſuperficiei figuræ, altitudinem verò perpendiculari* (F G) *à ſphæræ centro* (F) *in unum polygoni latus* (A D) *deductæ.*

a 21 *huj.* b 23 *hujus.* c 11. 12. Conus enim baſe ſuperficie D B E, [a] altitudine F G æquatur Rhombo D F E B. [b] Item conus, cujus baſis æquatur ſuperficiei A D E C, altitudo ipſi F G æquatur fruſto A D F E C: iſti ſimul coni adæquant conum K; hic Rhombus & fruſtum conſtituunt figuram inſcriptam cum cono A F C. ergò con K = fig. A D B E C + con A F C. *Q.E.D.*

Schol. Procedunt hæc circa portionem hemiſphærio minorem. In majori A Y C ſubtrahendus eſt conus A F C, ut ſit con K = fig. A Y C — con A F C. nempe ſi figura latus habens A D toti circulo inſcribi poſſit; vel ſi arcus A D circulum dimetiri poſſit, alias non ſuccedit. Similis eſt diſcurſus; quid plura? Idem in ſequentibus intelligendum, analogiâ bene ſervatâ.

Coroll.

Coroll. Conus, cujus basis æquatur circulo radium habente parem rectæ B C à vertice portionis ad basis circumferentiam ductæ, & altitudo radio sphæræ, superat inscriptam figuram cum cono A F C.

Hujus enim coni tam *basis, quàm altitudo superant basim & altitudinem coni K. * 42 *hujus.*

Prop. XLIV.

Sit sphæra, & in ipsa maximus circulus A B C, & semicirculo abscindatur rectâ A B; sitque centrum D; ac à centro D ad A, B connectantur D A, D B: & circa factum sectorem describatur polygonum, & circa ipsum circulus; habebit utique centrum idem cum circulo A B C: quòd si manente E K circumductum polygonum in idem denuò restituatur, descriptus circulus secundùm sphæræ superficiem feretur; & anguli polygoni circulos describent, quorum diametri polygoni angulos jungunt paralleli existentes ipsi A B. Puncta verò juxta quæ minorem circulum contingunt polygoni latera in minori sphæra circulos describunt, quorum diametri erunt quæ tactus conjungunt parallelæ existentes ad A B, latera verò secundùm conicas superficies ferentur, & erit circumscripta figura conicis superficiebus contenta, cujus basis qui super Z H circulus. Superficies autem dictæ figuræ major est superficie minoris portionis, cujus basis qui circa B circulus: ducantur enim tangentes A M, B N. secundùm conicam ergo superficiem ferentur; & a polygono A M T E N B genita figura majorem habebit superficiem, quàm portio sphæræ, cujus basis est qui circa diametrum A B circulus: nam in uno eodémque plano terminum habent circulum qui super diametrum A B; & à figura continetur portio. Sed facta ab ipsis Z M, H N superficies conica major est facta ab ipsis M A, N B; major enim est Z M quàm M A (rectum quippe *subtendit), ac N H, quàm N B; quando verò hoc erit, major est superficies superficie: hæc enim in lemmatis ostensa sunt. Liquet igitur quòd circumscriptæ figuræ superficies major est superficie portionis minoris sphæræ. Fig. 42. * Z A M. *Facilè deducitur ex 19 huj.*

Prop. XLV. Coroll.

Et patet quòd superficies circumscriptæ sectori figuræ æquatur circulo, cujus radius potest comprehensum & ab uno latere polygoni, & ab omnibus conjungentibus angulos, & præterea semisse basis dicti polygoni. Fig. 43. * Ριο ἐγγεγραμμένον λεγο πρίγεγρ.

Nam * circumscripta figura, majoris sphæræ portioni inscripta est. Inde liquet ex *antedictis. * 41 *hujus.*

inſcripti, & rectæ (F G + D E + A K) *æquali omnibus adſegmenti baſin* (A C) *parallelis, cum ſemiſſe diametri baſis.*

a 17 *hujus.* b 19 *hujus.* Nam ⊙ rad √ B F × F H [a] = ſuperf con F B G & ⊙ rad √ DF/BF × H G + D I [b] = ſuperf. D F G E. Item ○ rad √ DA/BF × I E + A K [b] = ſuperf A D E C. [c] ergo conjunctè ⊙ rad √ B F × F G + D E + A K = ſuperf F B G + D F G E + A D E C = ſuperf A D F B G E C. c {1. 2. cor. 2. 12. 1. ax. 1.} *Q.E.D.*

Coroll. Ductâ L F, erit ⊙ rad √ B K × L F = ſuperf A D F B G E C.

d *cor.* 25 *huj.* Nam B F × F G + D E + A K [d] = B K × L F.

Prop. XLII.

Sphæræ portioni inſcriptæ figuræ ſuperficies (S) *minor eſt circulo, cujus radius æquatur ductæ* (B A) *a portionis vertice* (B) *in circumferentiam circuli* (A C) *qui baſis eſt coni.*

a *cor.* 8. 6. & 17. 6. b *cor.* 2. 12. c *cor. præc.* Nam B K × L F ⊐ B K × L B [a] = B Aq. [b] ergo ⊙ rad B K × L F ([c] hoc eſt S) ⊐ ⊙ rad A B.

Prop. XLIII.

Fig. 41. *Portioni inſcripta figura* (A D B E C) *conicis ſuperficiebus contenta cum cono* (A F C) *baſin quidem eandem habente cum figura, verticem verò ſphæræ centrum* (F), *æquale eſt cono* (K) *baſin habenti parem ſuperficiei figuræ, altitudinem verò perpendiculari* (F G) *à ſphæræ centro* (F) *in unum polygoni latus* (A D) *deductæ.*

a 21 *huj.* b 23 *hujus.* c 11, 12. Conus enim baſe ſuperficie D B E, [a] altitudine F G æquatur Rhombo D F E B. [b] Item conus, cujus baſis æquatur ſuperficiei A D E C altitudo ipſi F G æquatur fruſto A D F E C: iſti ſimul coni adæquant conum K; hic Rhombus & fruſtum conſtituunt figuram inſcriptam cum cono A F C. ergò con K = fig. A D B E C + co A F C. *Q.E.D.*

Schol. Procedunt hæc circa portionem hemiſphærio minorem In majori A Y C ſubtrahendus eſt conus A F C, ut ſit con K = fig A Y C — con A F C. nempe ſi figura latus habens A D toti circul inſcribi poſſit; vel ſi arcus A D circulum dimetiri poſſit, aliàs no ſuccedit. Similis eſt diſcurſus; quid plura? Idem in ſequentibus in telligendum, analogiâ bene ſervatâ.

Coro

Coroll. Conus, cujus basis æquatur circulo radium habente parem rectæ B C à vertice portionis ad basis circumferentiam ductæ, & altitudo radio sphæræ, superat inscriptam figuram cum cono A F C.

Hujus enim coni tam *basis, quàm altitudo superant basim & altitudinem coni K. * 42 *hujus.*

Prop. XLIV.

Sit sphæra, & in ipsa maximus circulus A B C, & semicirculo abscindatur rectâ A B; sitque centrum D; ac à centro D ad A, B connectantur D A, D B: & circa factum sectorem describatur polygonum, & circa ipsum circulus; habebit utique centrum idem cum circulo A B C: quòd si manente E K circumductum polygonum in idem denuò restituatur, descriptus circulus secundùm sphæræ superficiem feretur; & anguli polygoni circulos describent, quorum diametri polygoni angulos jungunt paralleli existentes ipsi A B. Puncta verò juxta quæ minorem circulum contingunt polygoni latera in minori sphæra circulos describunt, quorum diametri erunt quæ tactus conjungunt parallelæ existentes ad A B, latera verò secundùm conicas superficies ferentur, & erit circumscripta figura conicis superficiebus contenta, cujus basis qui super Z H circulus. Superficies autem dictæ figuræ major est superficie minoris portionis, cujus basis qui circa A B circulus: ducantur enim tangentes A M, B N. secundùm conicam ergo superficiem ferentur; & a polygono A M T E N B genita figura majorem habebit superficiem, quàm portio sphæræ, cujus basis est qui circa diametrum A B circulus: nam in uno eodémque plano terminum habent circulum qui super diametrum A B; & à figura continetur portio. Sed facta ab ipsis Z M, H N superficies conica major est facta ab ipsis M A, N B; major enim est Z M quàm MA (rectum quippe *subtendit), ac N H, quàm N B; quando verò hoc fuerit, major est superficies superficie: hæc enim in lemmatis ostensa sunt. Liquet igitur quòd circumscriptæ figuræ superficies major est superficie portionis minoris sphæræ. Fig. 42. * Z A M. *Facilè deducitur ex 19 huj.*

Prop. XLV. Coroll.

Et patet quòd superficies circumscriptæ sectori figuræ æquatur circulo, cujus radius potest comprehensum & ab uno latere polygoni, & ab omnibus conjungentibus angulos, & præterea semisse basis dicti polygoni. Fig. 43. * Pro ἐγγεγραμμένον lego περιγεγρ.

Nam * circumscripta figura, majoris sphæræ portioni inscripta est. Unde liquet ex *antedictis. * 41 *hujus.*

Prop. XLVI.

Fig. 43. *Superficies* (S) *figuræ* (DEFGH) *circa ſectorem* (ZABC) *deſcriptæ major eſt circulo, cujus radius æquatur ductæ* (BA) *à vertice* (B) *portionis in circumferentiam circuli* (AC) *qui baſis eſt portionis.*

Circa figuram deſcribatur ſphæra DFHL; & connectantur rectæ DH, FD, LE. eſtque S [a] = ⊙ rad √ LE × FP = ⊙ rad √ BM × FP ([b] ob LE = BM) ⊏ ⊙ rad √ BM × BK. (eſt enim FP. BK [c] :: FD. BA :: [c] ZD. ZA. adeóque FP [d] ⊏ BK). atqui ⊙ rad √ BM × BK [e] = ⊙ rad BA. ergo S ⊏ ⊙ rad BA. *Q.E.D.*

a cor. 41 *huj.*
b *cor.* 33 *huj.*
c *hyp.* & 4. 6.
d 14. 5. (6.
e *cor.* 8. & 17. *cor.* 2. 12.

Prop. XLVII.

Fig. 44. *Quinetiam circumſcripta ſectori figura* (DEFGH) *cum cono* (DZH), *cujus quidem baſis eſt circulus circa diametrum* (DH) *vertex verò centrum* (Z) *æqualis eſt cono, cujus quidem baſis æqualis eſt ſuperficiei figuræ, altitudo autem perpendiculari* (ZN) *à centro ad latus ductæ, quæ utique æqualis eſt radio ſphæræ.*

Figuræ circumducatur ſphæra DEFGH; & liquet propoſitum ex 43 hujus.

Corollarium.

Hinc apparet circumſcriptam figuram cum cono DZH majorem eſſe cono, baſim quidem habente circulum cujus radius æquatur illi (BA) quæ à vertice (B) portionis minoris ſphæræ ad circumferentiam ducitur circuli (AC), qui baſis eſt portionis; altitudinem verò æqualem radio minoris ſphæræ.

Nam baſis hujus coni [a] minor eſt baſe coni, qui æquatur circumſcriptæ figuræ; altitudo autem æqualis.

a 46. & 47 *h.*

Prop. XLVIII.

Fig. 45. Sit rurſus ſphæra, & in ipſa maximus circulus; ac ſemicirculo minor portio ABC, & centrum D; & ſectori ABC inſcribatur polygonum parilaterum, & huic ſimile circumſcribatur, ſintque latera lateribus parallela; & circa polygonum circumſcriptum deſcribatur circulus; & ſimiliter ac in præcedaneis manente HB circumlati circuli figuras efficiant à conicis ſuperficiebus circumſeptas; demonſtrandum

ſtrandum eſt quòd circumſcriptæ figuræ ſuperficies ad inſcriptæ ſuperficiem duplicatam habet rationem, quam latus circumſcripti polygoni ad latus inſcripti. Figura verò cum cono triplicatam habet rationem ejuſdem.

Nam circulus, cujus radius æquatur potenti rectangulum ex parallelis ad E Z cum dimidia E Z, & latere E K, [a] æquatur ſuperficiei circumſcriptæ: & circulus, cujus radius æquatur potenti rectangulum ex parallelis ad A C cum dimidia A C, & latere A L, [b] æquatur ſuperficiei inſcriptæ. Hæc autem rectangula * ſimilia ſunt (ob polygonorum ſimilitudinem) adeóque [d] ſeſe habent, ut quadrata ex lateribus E K, A L: quare & dicti circuli (hoc eſt ſuperficies circumſcripta, & inſcripta) [e] ſe habent ut quadrata ex E K, A L, [d] hoc eſt in duplicatâ ratione ipſarum E K, A L.

a 45 *hujus.*
b 41 *hujus.*
* 4. 6.
d 20. 6.
e *cor.* 2. 12.

2. Ducatur D M perpendicularis ad latera E K, A L. Et quoniam conus, habens baſim æqualem ſuperficiei polygoni circumſcripti, altitudinem D M, [f] æquatur circumſcripto ſolido cum cono E D Z. & conus, cujus baſis æquatur ſuperficiei polygoni inſcripti, altitudo ipſi D N, [g] æquatur ſolido inſcripto cum cono A D C. Sunt autem radii baſium horum conorum (ut mox vidimus) ſicut latera E K, A L, [h] hoc eſt, ut altitudines D M, D N: [k] ergo hi coni ſimiles ſunt; adeóque [l] ſunt in triplicatâ ratione radiorum ſuorum, hoc eſt ipſarum E K, A L. & [m] proinde ſolida iſtis æqualia (circumſcriptum cum cono E D Z, & inſcriptum cum cono A D C) ſunt in eadem ratione triplicata. *Q. E. D.*

f 47 *hujus.*
g 43 *hujus.*
h 4. 6.
k 24. *def.* 11.
l 12. 12.
m 7. 5.

Prop. XLIX.

Cujuſcunque ſphæricæ portionis (A B C) *hemiſphærio minoris ſuperficies* (S) *æqualis eſt circulo* (X) *cujus radius æquatur ductæ* (B A) *à portionis vertice* (B) *ad circumferentiam circuli* (A C) *qui baſis eſt portionis ſphæricæ.* Fig. 46.

Si neges, eſto primùm ⊙ X ⊐ S. tum portioni circumſcribantur & inſcribantur figuræ (quarum ſuperficies appellentur Y, Z) ſic ut latus E F. A D bis (vel E Fq. A Dq) [a] ⊐ ⊙ X. S. Jam S. X [b] ⊏ E Fq. A Dq [c] = Y. Z. [d] ⊏ S. Z unde X [e] ⊐ Z, contra 42 hujus.

a 5 *hujus.*
b *conſt.*
c 48 *hujus.*
d 44 *hujus.* & 8. 5.

Sin dicatur X ⊏ S. ſit E Fq. A Dq [a] ⊐ X. S. eſtque X. S. [b] ⊏ E Fq. A Dq [c] = Y. Z [f] ⊏ Y. S. unde X [e] ⊏ Y, contra 46 hujus. Itaque potius, ut hæ vitentur repugnantiæ, eſt ⊙ X = S. *Q. E. D.*

a 10. 5.
e 10. 5.
f 40 *huj.* & 8. 5.

Prop. L.

Fig. 47. 48. *Quinimò ſi portio* (A B C) *major ſit hemiſphærio, ſimiliter ejus ſuperficies æqualis erit circulo, cujus radius æqualis eſt rectæ* (B A) *à portionis vertice deductæ ad circumferentiam circuli qui baſis eſt portionis.*

Ductâ enim diametro B D, & connexâ D A; erit circulus radio D B [a] æqualis ſuperficiei totius ſphæræ; & circulus radio D A [b] æqualis ſuperficiei portionis A D C. Detrahatur hic ab illo, [c] ſupereſtque circulus radio B A æqualis reſiduæ portioni A B C. *Q.E.D.*

a *coroll.* 38 *h.* b 49 *hujus.* c *cor.* 2. 12 & 3. *ax.* 1.

Corollaria.

1. Cujuſvis portionis ſuperficies (A B C) æquatur curvæ ſuperficiei cylindri (M R S N) habentis eandem altitudinem, vel axem (B K), & diametrum (R S) parem radio ſphæræ.

Nam ſuperf. cylindrica M R S N [a] æquatur circulo, cujus radius √ M R * R S, vel √ B K * B D, hoc eſt B A (nam B K, B A, B D ſunt ÷÷) [b] id eſt æquantur ſuperficiei portionis A B C. Hinc

a 16 *hujus.* b 49 & 50 *h.*

2. Superficies portionum A B C, A D C ſe habent ut axes K B K D. Nam cylindricæ ſuperficies ipſis æquales M R S N, μ R S ρ [d], ſe habent ut latera R M, R μ, hoc eſt ut B K, K D.

3. Sphæricarum quarumvis portionum, ſuperficies axibus ſuis proportionales ſunt.

Nam & cylindricis ſuperficiebus quibus æquantur [d] hoc convenit.

d 1. *cor.* 16. *h.*

4. Sphærica ſuperficies A α γ C parallelis planis A C, α γ intercepta æquatur cylindricæ ſuperficiei R ρ σ S iiſdem planis interceptæ: Nam ſi à ſuperficie cylindrica ρ N, cui æquatur ſphærica ſuperf. α B γ ſubtrahatur cylindrica ſuperf, R N, cui æquatur ſphærica ſuperficies A B C, remanebit ſuperf. cylind. ρ S æqualis ſuperf ſphæricæ A α γ C.

5. Zonæ, ſeu ſuperficies ſphæricæ parallelis planis interceptæ ſuis axibus proportionales ſunt.

Quia nempe cylindris, quibus æquales ſunt, id convenit.

Prop. LI.

Fig. 49. *Cuicunque ſphæræ ſectori* (G A B C, *vel* S) *æqualis eſt conus* (K) *baſin quidem habens æqualem ſuperficiei portionis* (A B C) *ad ſectorem pertinentis, altitudinem verò parem radio ſphæræ.* *Si*

Si neges, eſto primùm S ⊏ K. fiátque S. K [a] ⊏ L. M [b] ⊏ L. N ter. tum portioni circumſcribantur & inſcribantur figuræ X. Y, ſic ut latus E F. A D [c] ⊐ L. N. Eſtque S. Y + con A G C [d] ⊐ X + con E Z G. Y + con A G C [e] = E F. A D, ter [f] ⊐ L. N, ter [f] ⊐ L. M [f] ⊐ S. K. [g] ergo Y + con A G C ⊏ K; contra coroll. 43æ hujus.

a 3 *hujus.* b *lem. ad* 37 *h.* c 5 *hujus.* d 8. 5. e 48 *hujus.* f *conſt.* g 10. 5.

Sin dicatur K ⊏ S. Fiat K. S [a] ⊏ L. M [b] ⊏ L. N ter; & reliqua, ut priùs. & ob X + con E G Z. [d] Y + con A Z G ⊐ * L. M [f] ⊐ K. S [h] ⊐ K. Y + con A G C. [g] erit X + con E G Z ⊐ K, contra coroll. 47æ hujus. quin potiùs eſt con K = ſector S. *Q.E.D.*

* *priùs.* h 8. 5.

Schol. De ſectore ſphærico minori directè procedit demonſtratio, ſed infertur: idem facilè de majori. Nam quia conus, cujus baſis æquatur toti ſphæræ ſuperficiei, altitudo radio ſphæræ totam ſphæram exæquat; & conus, cujus baſis æquatur ſuperficiei portionis A B C, altitudo itidem radio ſphæræ, ſectorem A G C B adæquat: detracto hoc cono ab illo, reſtabit conus, habens baſim æqualem reliquæ ſuperficiei ſphæricæ, altitudinemque parem radio ſphæræ, æqualis reſiduo ſectori majori.

Corollaria.

1. Hinc ſector (A G C B) æquatur cono, cujus altitudo ſphæræ radio, baſis æquatur circulo radium habenti parem ſubtenſæ B A.

2. Portio ſphærica (A B C) æquatur iſti cono, dempto vel addito cono A G C; (addito, ſi portio major ſit hemiſphærio, dempto ſi minor:) ſi ſector hemiſphærio æquetur, cum portione coaleſcit.

Portionem ſphæricam cum cono methodo aliâ comparat *Archimedes*, in libro de Conoidibus & Sphæroidibus. Nam ſphæræ & portionibus ejus convenit, quicquid iſtic de ſphæroide ſphæroidiſque portionibus oſtenditur, reſpectivè.

ARCHI-

ARCHIMEDIS
De Sphæra & Cylindro
LIBER SECUNDUS.

Archimedes Dositheo Salutem.

ANtea quidem mandâsti mihi, Problematum demonstrationes scriberem, quorum ipse Propositiones ad *Cononem* miseram. Accidit autem eorum complura inter Theoremata scribi, quorum priùs ad te misi demonstrationes: quòd nempe omnis Sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli eorum qui in Sphæra: quinetiam quòd omnis portionis Sphæræ superficiei æquatur circulus, cujus radius æqualis est rectæ à vertice portionis ad basis circumferentiam ductæ. Præterea quòd omnis Sphæræ cylindrus, basin quidem habens maximum circulum ex iis, qui in Sphæra, altitudinem verò parem diametro Sphæræ, cum ipse magnitudine sesquialter est Sphæræ, tum superficies ejus sesquialtera superficiei Sphæræ. *Adhæc verò, quòd omnis sector solidus æqualis est cono basin quidem habenti circulum æqualem superficiei portionis Sphæræ, quæ in sectore, altitudinem verò parem radio Sphæræ. Quæcunque igitur Theoremata & Problemata scripta sunt *per hæc Theoremata in hoc libro describens ad te transmisi: quæcunque verò per aliam inveniuntur contemplationem, quæ sc. de Helicibus, & quæ de Conoidibus, propediem adnitar mittere. Problematum autem primum hoc fuit.

* Pro καὶ δόντι lego καὶ δὴ ὅτι.

*vel ex his theorematis (deducta scilicet)

Prop.

Prop. I.

Sphærâ datâ ſpatium planum invenire æquale ſuperficiei ſphæræ.

Hoc verò manifeſtum eſt, è prædictis Theorematis oſtenſum. Quadruplum enim maximi in ſphæra circuli planum ſpatium eſt, & æquale ſuperficiei ſphæræ.

Prop. II.

Secundum erat: *Dato cono vel cylindro* (A C) *ſphæram invenire cono, vel cylindro parem.* Fig. 50. 51.

Analyſis. Factum ſit; ſit nempe X diameter ſphæræ æqualis cylindro A C, cujus diameter A B, latus B C. Fiat B C. B D :: 2. 3. quare cylindrus A D [a]ſeſquialter erit cylindri A C, [b]hoc eſt ſphæræ ad diametrum X. ergo cylindrus A D [c]æquatur cylindro, cujus diameter, & altitudo æquantur ipſi X. [d]ergo erit A Bq. Xq :: X. B D. unde B D* $= \frac{\text{X cub.}}{\text{A Bq}}$ at verò A B, X, $\frac{\text{Xq}}{\text{AB}}, \frac{\text{X cub.}}{\text{ABq}}$ ſunt ∴. quare componitur ſic: ſit B C $= \frac{1}{3}$ B D. ([a]unde cylindrus A C $= \frac{1}{3}$ cyl A D); & inter A B, B D reperiantur duæ mediæ proportionales X, Y, erit X diameter ſphæræ æqualis cylindro A C. Nam ſphæra X eſt $\frac{2}{3}$ cylindri, cujus diameter & altitudo æquantur ipſi X; hic autem æquatur cylindro A D; quia eſt X. B D :: A B. Y :: A Bq. Xq. ergo ſphæra ad diametrum X æquatur cylindro A C. *Q. E F.*

a 14. 12.
b *hyp.*
c 39. 1 *hujus.* & 1 *ax.* 1.
d 15. 12.
a 14. 12.
b 39. 1. *hujus.*

Scholium.

Hoc problema ſolidum eſt, ad ipſius quippe ſolutionem exigens, ut duæ mediæ proportionales inveniantur; quod præſtare nequit Geometria communis, regulâ tantùm utens & circino; per conicas ſectiones, & aliis compluribus modis effici poteſt; de quibus hic taceo.

Prop. III.

Omnis ſphæræ portioni (B V A) *æquatur conus* (B E A) *habens quidem baſim* (B A) *portioni communem, altitudinem verò rectam* (K E), *quæ ad portionis altitudinem* (K V) *eandem rationem habet, quam compoſita è ſphæræ radio* (C V) *& reliquæ portionis altitudine* (K D) *ad reliquæ portionis altitudinem* (K D). Fig. 52.

Nam

a *hyp.* Nam ob K E. K V [a]:: K D + C V. K D; erit dividendo V E. K V :: C V. K D; & permutando V E. C V :: K V. K D; & componendo C E. C V ([b]hoc est. con $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad K B.}\\ \text{alt. C E}\end{matrix}\right.$ con. $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad K B.}\\ \text{alt. C V.}\end{matrix}\right.$) ::

b 14. 12.

c 20. 6. D V. K D [c]:: D Vq. D Bq [d]:: V Bq. K Bq :: [e] con $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad V B.}\\ \text{alt. C V.}\end{matrix}\right.$

d 8. & 22. 6.

e 11. 12. con $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad K B}\\ \text{alt. C V.}\end{matrix}\right.$ ergo [f] erit con $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad K B}\\ \text{alt C E}\end{matrix}\right.$ = con $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad V B}\\ \text{alt C V}\end{matrix}\right.$

f 9. 5. [g] = port B V A + con B C A. auferatur utrinque con $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad. K B}\\ \text{alt. C K}\end{matrix}\right.$

g 1. & 2 cor. 51. *huj.*

h 14. 12. & 3. *ax.* 1. = con B C A; [h] reſtabit con $\left\{\begin{matrix}\text{baſ rad K B}\\ \text{alt. K E}\end{matrix}\right.$ = port. ABC. *Q E D.*

Si portio major ſit hemiſphærio, idem planè diſcurſus adhibetur, niſi quòd hìc utrinque ſit addendus conus B C A, ſicut iſtic aufertur.

Corollarium.

Hinc facile eſt datæ portioni, ad eandem baſin, æqualem conum conſtituere; faciendo ſc. KD. K D + C V :: K V. K E; eritque K E quæſiti coni altitudo. Tertium Problema hoc erat:

Prop. IV.

Fig. 53. *Datam ſphæram* (B V A D) *plano ſecare, ita ut portionum ſuperficies ad ſe rationem habeant, eandem datæ* (X *ad* Y).

a 2 cor. 50. 1 *b.* b 10. 6. Quia ſuperficies ſphæricæ [a]ſe habent ut axes; liquet ſi diameter ſphæræ [b]ſecetur ad K, ut ſegmenta V K, K D ſint in ratione X ad Y, & per K ducatur planum B A ad ipſam V D rectum, eſſe ſuperficiem B V A ad ſuperficiem B D A, ut V K ad K D, vel X ad Y; & proinde factum eſſe quod poſtulatur.

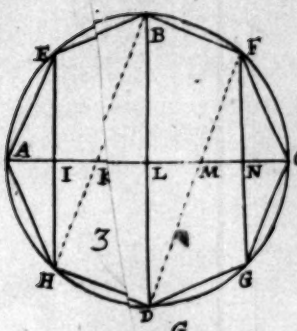
Prop. V.

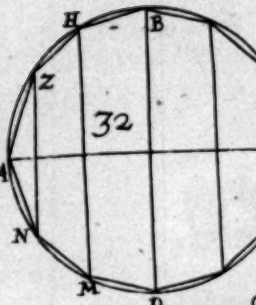
Fig. 54. *Datam ſphæram* (B V A D) *plano ita ſecare, ut portiones ſphæræ rationem habeant eandem datæ* (X *ad* Y).

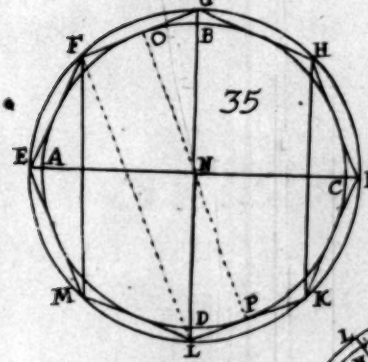
Analyſis. Factum ſit; ſecet nempe planum B A ſphæram, ita ut portiones B V A, B D A habeant rationem X ad Y; & ſit V D portionum axis; ſintque V D = *d*. *C V = *r*. D K = *a*. unde K V =

*C centrum ſphæræ.

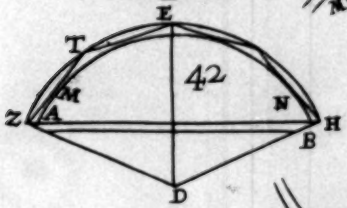
2 *r*

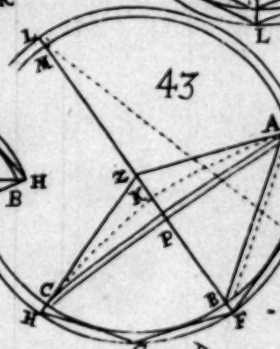

E
B
F
A
I
K
L
M
N
C
3
H
G
D


H
B
Z
32
A
N
M
D


G
F
O
B
H
35
E
A
N
C
I
M
D
P
K
L

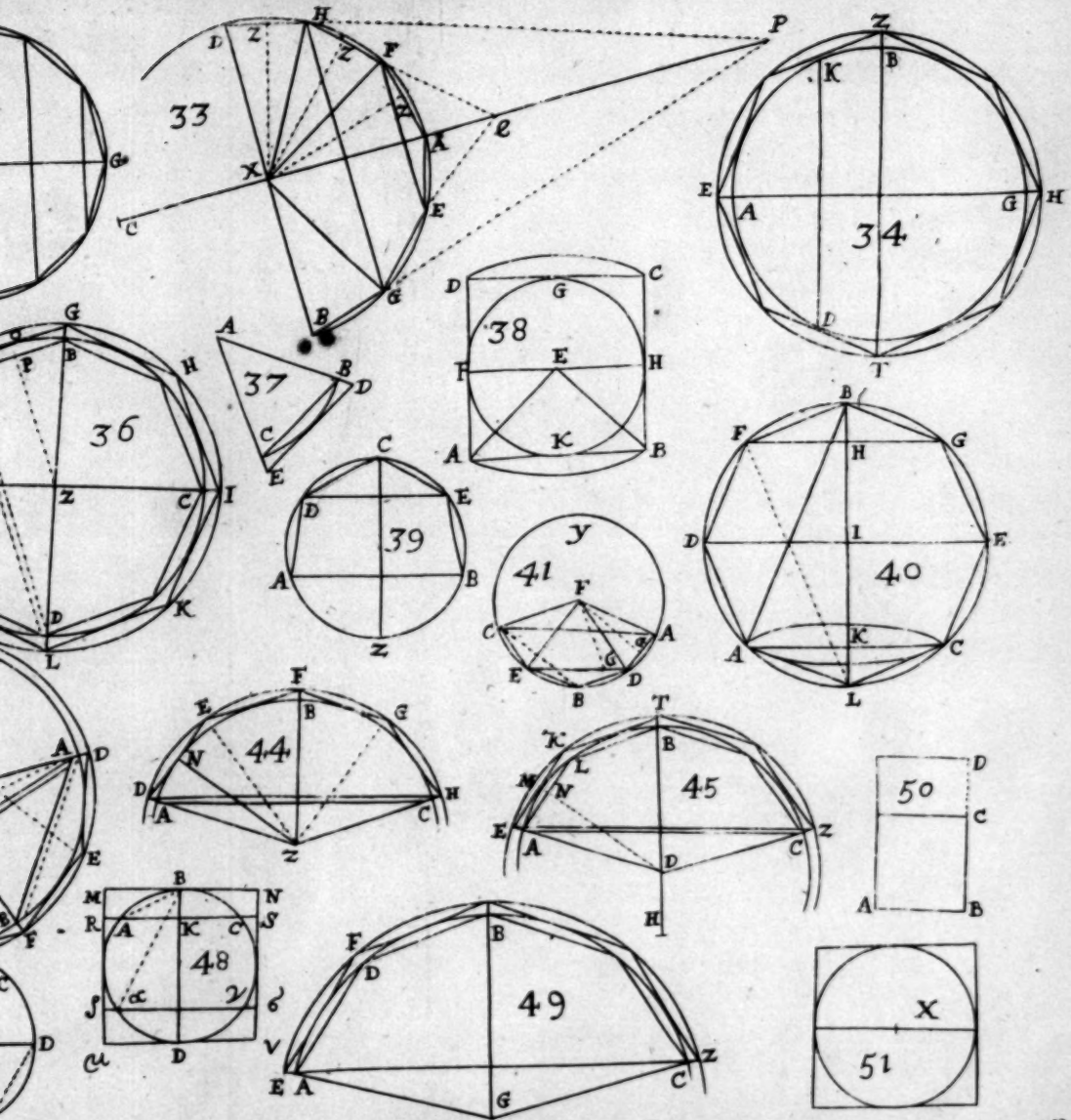
F
N
P
E
A
M
D
L


E
T
42
M
Z
A
N
H
B
D


L
M
43
A
Z
K
P
C
H
B
F
G

F
B
D
46
L
A
C

C
B
D
47
A



Archimedes. Pag. 32.

$2r-a$. Jam ſi DK. DK + CV :: KV. KE, hoc eſt $a.a+r :: 2r-a.$ KE $= \frac{2rr+ra-aa}{a}$. [a] erit conus B E A æqualis portioni BVA. [a] 3 *hujus.*

Item ſi [a] VK. VK + CV :: KD. KF; hoc eſt $2r-a. 3r-a :: a.$ $\frac{3ra-aa}{2r-a}$ = K, [a] erit conus B F A æqualis portioni B D A. [b] ergo X.Y [b] *hyp. & 7.5.*

:: con B E A. con B F A [c] :: KE. KF :: $\frac{2rr+ra-aa}{a}. \frac{3ra-aa}{2r-a}$ ::X. [c] 14 12.

Y. quare (ducendo in ſe extrema & media) erit $\frac{3xra-xaa}{2r-a} = \frac{2yrr+yra-yaa}{a}$; & (utrumque latus multiplicando per $2r-a$ & a) erit $3xraa-xa^3 = 4ry^3-3yraa+ya^3$. & (tranſponendo) $3xraa+3yraa-xa^3-ya^3=4yr^3$. & (utrinque dividendo per $x+y$) $3raa-a^3 = \frac{4yr^3}{x+y} = \frac{*yrdd}{x+y}$ (*ſubſtituendo *dd* pro $4r^2$). & faciendo $x+y$. [*] 4. 2.

$y :: r. p = \frac{yr}{x+y}$, erit $3raa-a^3=pdd$. hoc eſt, æquationem hanc, ad analogiſmum redigendo, $3r-a.p :: dd.aa$. hoc eſt CV + KV. $\frac{Y \times CV}{Y+X}$ :: V Dq. D Kq. qui ipſiſſimus eſt analogiſmus ad quem rem deduxit *Archimedes*, (quod, ut hoc obiter moneam, ſatis prodit qualem is analyſin uſurpârit; nam huc eum deveniſſe varias iſtas proportionum compoſitiones, diviſiones, alternationes, & inverſiones, quas oſtentat, adhibendo, penè ſupra fidem ſit: quod ſi feciſſet, caſui potiùs imputandum eſſet, quàm arti, quòd in genuinas inciderit ſolutiones, & hoc ei conſtanter obtigiſſe, vix concipi poteſt.

Ipſum Problema quod attinet, liquet illud eſſe ſolidum, nec in eo genere facillimum effectu; integram pollicetur Author ejus reſolutionem & compoſitionem, at quòd præſtiterit non apparet. Ei ſupplendo defectui nonnullas *Eutocius* bene longas & laborioſas exhibet conſtructiones, per conicarum utique ſectionum occurſus, quas nos omittimus. Præ illis concinnam & expeditam conſtructionem tradit Excellentiſſimus *Hugenius*, in primo Problematum illuſtrium, quam vide sis; vel adhibeas ipſe generalem *Carteſii* methodum, quam pro conſtruendis hujuſmodi problematis edocet, in Geometriæ ſuæ tertio.) Nos Authoris inſiſtentes veſtigiis ſuppoſitâ hujus analogiſmi effectione, problema ſic componimus.

Fiat X + Y. Y :: CV. P ; & secetur DV in K, ita ut sit CV + KV. P :: V Dq. K Dq. & per K transeat planum ipsi V D rectum. Dico factum. Nam sit CV + DK. DK :: KE KV. & CD + VK. VK :: KF. KD, eritque dividendo CV. DK :: VE. KV. & CD. VK :: DF. KD. permutandóque CV. VE :: DK. KV :: DF. CD. inverseque componendo CE. CV (CD) :: CF. DF. & tam antecedentes quàm consequentes conjungendo EF. CF :: CF. DF. unde EF. DF [a] :: CFq. DFq :: DVq. DKq (erat enim priùs CD, DF :: KV. DK ; adeóque componendo CF. DF :: DV. DK). atqui DVq. KDq [b] :: CV + KV. P. [c] ergo EF. DF :: CV + KV. P. quinetiam fuit CV + VK. VK :: KF. KD ; & conversione rationis CV + VK. CV :: KF. DF ; seu inversè CV. CV + VK :: DF. KF. ergo ex æquo perturbatè CV. P :: EF. KF. [d] id est X + Y. Y :: EF. KF. & divisim X. Y :: EK. KF [e] :: con BEA. con BFA [f] :: port BVA port BDA :: X. Y. *Q. E. F.*

a 22. 6.
b *const.*
c 11. 5.
d *const.* & 11. 5.
e 14. 12.
f *const* & 3 *b.*

Lemma, pro sequenti.

Fig. 55. 56.

Sint coni DMF, GOI æquales similibus sphæricis portionibus DEF, GHI (ad easdem bases constitutis) ; dico conos hos assimilari.

Nam productis axibus MNR, OPT sint sphærarum centra Q, S. & ob portionum similitudinem erit EN. NR :: HP. PT. & antecedentes dimidiando QR. NR :: ST. PT. componendóque QR + NR. NR :: ST + PT. PT. [a] hoc est MN. EN :: OP. HP. at rursus, ob portionum similitudinem, est EN ND :: HP. PG. ergo ex æquali MN. ND :: OP. PG. [b] ergo coni DMF, GOI sunt similes. *Q. E. D.*

a 3 *hujus*
b 24 *def.* 11.

Prop. VI.

Fig. 57.

Datæ sphæræ portioni (DEF) *similem, alterique datæ* (ABC) *æqualem constituere.*

Analysis. Sit GHI portio quæsita, fiántque coni AKC, DMF, GOI æquales portionibus ABC, DMF, GOI, singulæ singulis ordine. [a] Quare con GOI = con AKC. & [b] idcirco ACq. GIq :: PO. LK. [*] unde $\frac{ACq \times LK}{GIq} = PO.$ Item ob [c] similitudinem conorum DMF, GOI [d] est DF. NM :: GI. PO :: [e] GI. $\frac{ACq \times LK}{GIq}$ :: GI

a 1. *ax.* 1.
b 15. 12.
* c *lemm. præc.*
d 24 *def.* 11.
e 7. 5.

:: G I cub. A Cq × L K. quare $\frac{DF \times ACq \times LK}{NM} = GI$ cub. & (dividendo per A Cq) $\frac{DF \times LK}{NM} = \frac{GI\ cub}{ACq}$. atqui AC, GI, $\frac{GIq}{AC}$, $\frac{GI\ cub}{ACq}$ sunt ÷÷. ergo G I est prima duarum inter A C, & $\frac{DF \times LK}{NM}$ mediarum proportionalium.

Vides & hoc problema esse solidum, utpote quod desideret inventionem duarum mediarum proportionalium; quâ suppositâ sic construetur. [a]Fiant coni A K L, D M F pares datis portionibus A B C, D E F. sitque M N. K L :: D F. Z = $\frac{KL \times DF}{MN}$. & inter A C, Z reperiantur proportione mediæ G I, & X. Circa G I verò describatur portio circularis G H I continens angulum G H I = ang D E F. erit portio G H I, quam quæris. Nam faciendo conum G O I parem portioni G H I, quia portiones G H I, D E F [c] similes sunt, [d] erunt & coni G O I, D M F similes. quare P O. G I [e] :: M N. D F :: [f] K L. Z. & permutando P O. K L :: G I. Z [f] :: A C. X [g] :: A Cq. G I q. ([h]sc. ob A C, G I, X, Z ÷÷). itaque reciprocam habent coni G O I, A C K basium & altitudinum proportionem; [k] ergo coni G O I, A C K [h](hoc est portiones G H I, A B C) æquantur. *Q.E.F.*

a 3 *hujus.*
b 33. 3.
c *constr.*
d *lem. præc.*
e 24 *def.* 11.
f *const & 16.5.*
g 20. 6.
h *const.*
k 15. 12.

Prop. VII.

Datis duabus sphæræ portionibus (A B C, D E F) [*sive ejusdem sive non*] *invenire sphæræ portionem, quæ quidem datarum uni* (D E F) *similis erit, superficiem verò habebit alterius portionis* (A B C) *superficiei parem.* Fig. 58. 59. 60.

Analysis. Sit portio G H I qualis exponitur. unde cùm portionum G H I, A B C superficies æquentur, [a]erit circulus radio H I æqualis circulo ad radium B C; & proinde H I = B C. Item ob similitudinem superficierum D E F, G H I, erit E F. E R :: H I (vel B C). H T: hinc Synthesis. Fac E F. E R :: B C. H T. & sit H T diameter sphæræ; & secetur H T in P, [d] ita ut sit H P. P T :: E N. N R; & per P transeat planum G I ad H T rectum: liquet portionem G H I fore similem ipsi D E F; & esse H I. H T [e] :: E F. E R [f]:: B C. H T. adeoque esse H I = B C. & idcirco circulum radio H I [g] æquari circulo ad radium B C; [h]hoc est superficiem sphæricam G H I superficiei A B C. *Q.E.F.*

a 49. & 50. 1 *h.*
d 10. *k.*
e *const. & cor.* 8. 6.
f *const.*
g 9. 5.
h 49. & 50. 1 *k.*

Prop. VIII.

Fig 61. *A data sphæra* (B V A D) *plano abscindere portionem* (B V C), *ita ut portio ad conum* (B V C) *habentem eandem cum portione basim* (B A) *& æqualem altitudinem* (V K) *habeat rationem datam* (X *ad* Y).

Quæsita portio sit B V A, & conus B V A; quibus axis communis V K; in quo protracto centrum sphæræ, C; ponatur autem conus B E A æqualis portioni B V A; [a] unde C D + K D. K D :: E K. V K [b] :: con B E A. B V A [c] :: X. Y. dividendóque X — Y. Y :: C D. K D. unde componitur sic: fiat X — Y. Y :: C D. K D. (adeóque componendo erit X. Y :: C D + K D. K D); per K verò transeat planum B A ad V D rectum; túmque si fiat conus æqualis resectæ portioni B V A, erit E K. V K ([d] id est con B E A. con B V A) [b] :: C D + K D. K D [c] :: Y. X. [d] adeóque port. B V A. con B V A :: Y. X. *Q.E.F.*

a 3 *hujus.*
b 14. 12.
c *const. & 7. 5.*
a 14. 12.
b 3. *hujus.*
c *prius*
d *const. & 7. 5.*

Lemma.

Sint utcunque A ⊏ B, & C ⊏ D. Erit A + D. B + D. ⊏ A + C. B + C.

Nam A ×: C — D ⊏ B ×: C — D; hoc est A C — A D ⊏ B C — B D. & transponendo A C + B D ⊏ B C + A D. ergo utrinque adjungendo A B + C D, erit A C + B D + A B + C D ⊏ B C + A D + A B + C D, [a] hoc est A + D ×: B + C ⊏ B + D × A + C. * quare A + D. B + D ⊏ A + C. B + C.

a *Sch.* 1. 2.
* *Sch.* 16. 6.

Prop. IX.

Fig. 62. *Si sphæra* (B V A D) *plano secetur non per centrum, major portio* (B V A) *ad minorem* (B D A) *rationem quidem habet minorem quàm* *duplam *ejus, quam habet majoris portionis superficies ad superficiem minoris; majorem verò quàm sesquialteram.*

Sit conus B E A = port. B V A. & conus B F A = port. B D A. [a] quare C D + K D. K D :: E K. V K. & dividendo C D. K D :: E V. V K [b] ⊏ V K. C D (quia C Dq [c] ⊏ K D × V K) [d] ergo E V ⊏ V K, & E V × C D [b] ⊏ V Kq. [e] Est verò C D + V K. K F [f] :: V K. K D :: E V. C D * ⊏ E V + V K — C D + V K (E K. C D + V K). [g] ergo Qu: C D + V K ⊏ K F × E K. & [h] proinde Q : C D + V K. K Fq ⊏ K F × E K. K Fq. [k] hoc est V Kq. K Dq ⊏ E K. K F, hoc est

a 3 *hujus.*
* διπλάσιον.
b *Sch.* 17. 6.
c 5 2.
d 14. 5.
e 3 *h.* & 16. 5.
f *prius* & 16. 6.
* — 5.
h 8. 5.
k *fin.* & 1. 6.

est [l] duplicata ratio superficierum BVA. BDA major est [m] ratione conorum BEA, BFA; vel portionum BVA, BFA. quod erat primum.

Porro fiat $Xq = EV \times CD$ [p] $\sqsubset VKq$; & quia $EV. X$ [q] $:: X. CD$, [r] erit $EV + X. X + CD :: X. CD$. [s] ergo $Qu : EV + X. Qu : X + CD :: Xq. CDq$ [t] $:: EV. CD$. verùm $EV + VK. CD + VK$ [u] $\sqsubset EV + X. CD + X$. (quia $\frac{EK}{EV \sqsubset CD}$ & X [x] $\sqsubset VK$). ergo $EKq. Qu. CD + VK. \sqsubset EV. CD$ [x] $:: CD + VK. KF$. pone $Z, CD + VK, Y, KF$ esse $\div\div$, ergo $Zq. Qu : CD + VK$ [y] $:: Z. Y$ [z] $:: CD + VK. KF$ [x] $\sqsupset EKq. Qu : CD + VK$. [z] quare $Z \sqsupset EK$. atqui ratio Z ad KF [a] sesquialtera est rationis $CD + VK$ ad KF. [c] ergo ratio EK ad KF ([γ] hoc est coni BEA ad conum BFA, [δ] vel portionis BVA ad portionem BDA) major est sesquialterâ rationis $CD + VK$ ad KF, [x] vel VK ad KD, [ε] hoc est superficiei sphæricæ BVA ad BDA. ergo secundo quoque propositum constat.

[l] 13 cor. 50 *huj.* [m] 14. 12. [p] *supra.* [q] 17. 6. [r] 16. & 18 5. [s] 22. 6. [t] 20. 6. [u] *lemm. præc.* [x] *supra.* [y] 16. 5. [z] 10. 5. [a] *const.* [c] 8. 5. [γ] 14. 12. [δ] *const.* & 7. 5. [ε] 3 cor. 50 *h.*

Prop. X.

Sphæricarum portionum (ABC, DEF) *sub æquali superficie contentarum maximum, est hæmisphærium* (ABC). Fig. 63, 64.

Sint coni AGC, DHF æquales portionibus ABC, DEF. quare KG [a] $= 2KA$. [b] & $EM + LO. LO :: LH. LE$. sit M centrum sphæræ DEF, & $EN = BK$. ergo $2ENq = KAq$ [c] $= BAq$ [d] $= EDq$ [e] $= OE \times EL$ [f] $= 2EM \times EL$; quare ENq [g] $= EM \times EL$. ergo EN media cadit inter puncta M, L; unde $EN \times NO$ [h] $\sqsubset EL \times LO$. Additis igitur hinc inde æqualibus ENq & $EM \times EL$; erit $EN \times EO$ ([k] hoc est $EN \times NO + ENq$) $\sqsubset EL \times LO + EM \times EL$ [l] $= LH \times LO$. [m] ergo $EN. LH \sqsubset LO. EO$ [o] $:: ODq. EOq$ [p] $:: DLq. EDq$ [q] $:: DLq. 2KAq$. & antecedentes duplicando $2EN (KG). LH \sqsubset 2DLq. 2KAq$ [r] $:: DLq. KAq$. Ponatur igitur $KZ. LH :: DLq. KAq$. [s] eritque $KZ \sqsupset KG$; [t] & ideo conus AZC $\sqsupset$ con AGC. [u] hoc est conus DHF minor cono AGC, [x] vel portio DEF minor portione ABC. *Q.E.D.*

[a] *cor.* 38. 1 *b.* [b] 3 *hujus.* [c] 47. 1. [d] *hyp.* 1. & 49 *vel* 50 *hujus.* [e] *cor.* 8. & 17 6. [f] *const.* & 1. 2. [g] 6. *ax.* 1. [h] *cor.* 5. 2. [k] 3. 2. [l] *supra* & 16. 6. [m] *sch.* 16 6. [o] *cor.* 8 *et* 20. 6. [p] *cor.* 8. *et* 22 6. [q] *supra* & 7. 5. [r] 15. 5. [s] 10. 5. [t] 14. 12. & 14. 5. [u] 15. 12. [x] *const.*

De Circuli Dimenſione.

Lemma.

Fig. 65. POlygonum ordinatum G H I K L M circulo circumſcriptum æquatur triangulo, cujus baſis eſt ambitus polygoni, altitudo verò radius N P.

Nam radius N P ad contactum ductus tangenti G H perpendicularis eſt; & ſi ductis rectis N G, N H, N I, N K, N L, N M polygonum reſolvatur in triangula, erit radius N P communis omnium altitudo, [a] proindeque triangula ipſa æqualia erunt; [b] ergo triangulum

a 1. 6. baſin habens parem ſummæ laterum G H, H I, I K &c. altitudinem verò N P æquabitur illis omnibus, hoc eſt toti polygono circumſcripto.

Similiter polygnum A B C D E F inſcriptum circulo æquatur triangulo, cujus baſis eſt ambitus polygoni, altitudo verò perpendicularis N O è centro in unum aliquod latus ducta.

Prop. I.

In fig. præced. Fig. 66. *Omnis circulus* (N) *æqualis eſt triangulo* (Q R S), *cujus radius* (N P) *æqualis eſt uni lateri* (Q R) *circa rectum angulum, perimeter verò baſi* (R S).

b 1. 1. *de ſph. & cyl.* Si negas ſit primò triang Q R S ⊐ ⊙ N. Circulo N [a] inſcribatur polygonum ordinatum A B C D E F, ita ut ⊙ N − polyg A B C D E F ⊐ ⊙ N − triang Q R S; quare polyg A B C D E F ⊏ triang Q R S; & quoniam ambitus polygoni [b] minor eſt perimetro circuli, hoc eſt ipsâ R S, ſit ei æqualis R T; & connectatur Q T; cùm itaque ſit

c *lemm. præc.* R Q ⊏ N O, [c] erit polyg A B C D E F ⊐ triang Q R T ⊐ Q R S. verùm erat polyg A B C D E F ⊏ triang Q R S, quæ repugnant.

Sin velis eſſe triang Q R S ⊏ ⊙ N; circulo circumſcribatur polygonum G H I K L M [a] ⊐ triang Q R S; [d] ejus perimeter circuli

d 2. 1. *de ſph. & cyl.* perimetro major eſt, ſit æqualis R V, & connectatur Q V; [c] ergo polyg G H I K L M = triang Q R V ⊏ triang Q S R; at erat polyg G H I K L M ⊐ triang Q R S, quæ repugnant.

Ergo

Ergò potiùs circulus triangulo Q R S æquatur; *Q. E. D.*

Breviùs. Circulus eſt quaſi polygonum ordinatum infinitilaterum, in quo radius eſt perpendicularis ad latera, peripheria verò ſumma laterum; unde conſtat è præmiſſo lemmate propoſitum.

Coroll. Si circumferentia dicatur ⊙, diameter ♢, radius *r*, erit ⊙ = $\frac{r⊙}{2} = \frac{⊙}{♢}\,rr$.

Lemma. Sit A. B ⊏ C. D; & B = D; erit A ⊏ C. Nam ſit A. E :: C. D. [a] ergò E ⊏ B; hoc eſt E ⊏ D; [b] quare A ⊏ C. [a] 10. 5. [b] 14. 5.

Prop. II.

Omnis circuli perimeter (⊙) tripla eſt diametri (A D, vel ♢), & præterea excedit minori quidem quàm $\frac{1}{7}$ (vel $\frac{10}{70}$), majori verò quàm $\frac{10}{71}$ diametri.

Pars prima.

Dico fore ⊙. ♢ ⊐ $3\frac{1}{7}$. 1. Ducatur tangens A D; ſitque $\frac{1}{3}$ rect = ∠ A C D = 2 ∠ A C E = 4 ∠ A C F = 8 ∠ A C F = 16 ∠ A C H = 32 ∠ A C K. quare 2 ang A C K = $\frac{1}{96}$ 4 rect; unde 2 A K × 96 eſt ambitus polygoni circulo circumſcriptibilis, circulo circumferentia major; itaque ſi 2 A K × 96 ⊐ $3\frac{1}{7}$ A B, [*] liquet hæc pars; id verò ſic oſtenditur: [*] 8. 5.

Ob ang A C E = $\frac{1}{3}$ rect. eſt C E [a] = 2 E A; & ob ang. A C E = 2 A C F, eſt C E. C A [b] :: E F. F A; & componendo C E + C A. C A :: E A. F A; permutandóque C E + C A. E A :: E A. F A: [a] 3 *cor.* 12. 13. [b] 3. 6.

simili diſcurſu eſt

$$\left.\begin{matrix} CF \\ CG \\ CH \end{matrix}\right\} + CA.\ \begin{matrix} FA \\ GA \\ HA \end{matrix} :: CA.\ \left\{\begin{matrix} GA. \\ HA. \\ KA. \end{matrix}\right.$$

Ponatur C E = 306; quare E A = 153, ac [c] C A ($\sqrt{}$ C Eq — E Aq) = $\sqrt{}$ 93636 — 23409 = $\sqrt{}$ 70227 ⊏ $\sqrt{}$ 70225 = 265. [d] ergo 571 (306 + 265). 153. ⊐ C E + C A. E A :: C A. F A; itaque poſito F A = 153 = $\sqrt{}$ 23409, [c] erit C A ⊏ 571 = $\sqrt{}$ 326041; adeóque C Fq ⊏ 23409 + 326041 = 349450 ⊏ 349428 $\frac{42}{64}$ = q. 591 $\frac{1}{8}$. [c] *lemm. prec.* [d] 8. 5.

Hinc 1162 $\frac{1}{8}$ (591 $\frac{1}{8}$ + 571). 153 [d] ⊐ C F + C A. F A :: C A. G A; quare poſito jam G A = 153, [e] erit C A ⊏ 1162 $\frac{1}{8}$. = $\sqrt{}$ 1350534 $\frac{11}{64}$; & ideo C G q ⊏ 23409 + 1350534 $\frac{11}{64}$ = 1373943 $\frac{11}{64}$ ⊏ 1373720 $\frac{42}{64}$ = q. 1172 $\frac{1}{8}$.

Igi-

Igitur $2334\frac{1}{4}$ ($1172\frac{1}{8}$ + $1162\frac{1}{8}$). 153 [d] ⊐ CG + CA GA :: CA. HA ; ergo si rursus ponatur HA = 153 ; [e] erit CHq ⊏ q. 153 + q. $2334\frac{1}{4}$ = 23409 + $5448723\frac{1}{16}$ = $5472132\frac{1}{16}$ ⊏ $5472028\frac{1}{16}$ = q. $2339\frac{1}{4}$. Itaque denuo $4673\frac{1}{2}$ ($2339\frac{1}{4}$ + $2334\frac{1}{4}$). 153 [d] ⊐ CH + CA. HA :: CA. KA ; ergo si ponatur KA = 153, [e] erit CA ⊏ $4673\frac{1}{2}$; quare AB. 2KA ⊏ $4673\frac{1}{2}$. 153.
f 15. 5. vel inversè 2 KA. AB ⊐ 153. $4673\frac{1}{2}$. [f] ergo 94 × 2KA. AB ⊐ 94 × 153. $4673\frac{1}{2}$; hoc est ⊐ $14688.4673\frac{1}{2}$ ⊐ $14688\frac{4}{7}.4673\frac{1}{2}$ :: $3\frac{1}{7}$. 1. quare liquet prima pars.

Pars secunda.

Dico fore ●. ♪ ⊏ $3\frac{10}{71}$. 1. Sit $\frac{1}{6}$ ● = arc AD = 2 arc AE = 4 arc AF = 8 arc AG = 16 arc AH ; quare AH = $\frac{1}{96}$ ● ; unde 96 AH est ambitus inscriptibilis polygoni perimetro circuli minor ;
* 8. 5. quòd si igitur sit 94 AH. AB. ⊏ $3\frac{10}{71}$. 1 ; * liquebit fore magis ●. ♪ ⊏ $3\frac{10}{71}$. 1. illud verò sic constat.

Fig. 59. Ducantur rectæ BD, BE, BF, BG, BH ; & AD, AE, AF, AG, AH ; & ob ang ABD = 2 ABE, est DB. BA [h] :: DX. KA ; &
h 3. 6. componendo DB + BA. BA :: DA. KA ; permutandóque DB
k 4. 6. + BA. DA :: BA. KA [k] :: BE. EA. (nam ob [l] similia triangula
l 27. 3. EBA, EAK est BA. KA [h] :: BE. EA).

Simili discursu est EB } EA. BF. FA.
FB } + BA. FA. :: BG. GA.
GB } GA. BH. HA.

Sit BA = 1560. ergo CA (DA) = 780 ; & DBq (BAq — ADq) = 1825200 ⊐ 1825201 = q. 1351. [m] ergo 2911) 1560
m 8. 5. + 1351). 780 ⊏ DB + BA. DA :: BE. EA ; quare si ponatur EA = 780, [n] erit BE ⊐ 2911 ; & BAq (BEq + EAq) ⊐
n lemm. frac. 9082321 ⊐ q. $3013\frac{1}{4}$.

[m] Quare $5924\frac{1}{4}$ ($2911 + 3013\frac{1}{4}$). 780. (hoc est 1823. 240) ⊏ EB + BA. EA :: BF. FA ; unde si FA ponatur 240, [n] erit BF ⊐ 1823. & BAq (FAq + BFq) ⊐ 3380929 ⊐ q. $1838\frac{2}{11}$.

Unde iterum $3661\frac{2}{11}$ ($1823 + 1838\frac{2}{11}$). 240 (hoc est 1007. 66) [m] ⊏ FB + BA. FA :: BG. GA ; quare posito GA = 66, [n] erit BG ⊐ 1007 ; & BAq (GAq + BGq) ⊐ 1018405 ⊐ q $1009\frac{1}{6}$.

Itaque denuo $2016\frac{1}{6}$ ($1007 + 1009\frac{1}{6}$). 66 [m] ⊏ GB + BA. GA :: BH. HA ; unde si ponatur HA = 66, [n] erit BH ⊐ $2016\frac{1}{6}$; & BAq (HAq + BHq) ⊐ $4069284\frac{1}{36}$ ⊐ q. $2017\frac{1}{4}$ ergo BA.

AH

A H ⊐ $2017\frac{1}{4}.66$; vel inversè A H. B A ⊏ $66.2017\frac{1}{4}$. [p] quare [p] 15. 5. 96 A H. B A ⊏ $94 \times 66.2017\frac{1}{4}$ (hoc est, $6336.2017\frac{1}{4} :: 3\frac{1}{8}\frac{2}{0}\frac{8}{7}\frac{1}{1}$. 1.) quare 96 A H. B A ⊏ $3\frac{1}{8}\frac{2}{0}\frac{8}{7}\frac{1}{1}$ I ⊏ $3\frac{10}{71}$. 1. unde constat propositum.

Coroll. Hinc ●. ☌ :: 22. 7, ferè.

Prop. III.

Circulus ad suæ diametri quadratum rationem habet eandem (ferè), quam 11 *ad* 14.

Nam ☌●. ☌☌ [a] :: ●. ☌ [b] :: 22. 7. ergo $\frac{☌●}{4}$ (⊙). ☌☌ :: $\frac{11}{4}.7 :: \frac{44}{4}.14$ 21. 6. (hoc est) :: 11. 14.

[b] *cor.* 2. *huj.*

Cyclometriam longiùs, & ad majorem *circuitum* promovit posteriorum industria. Consulantur *Vietæ*, *Ludolphi à Ceulen*, *Metii*, *Snellii*, *Hugenii* lucubrationes: ad crassiores saltem usus sufficit hæc *Archimedea* Circuli dimensio.

De SPIRALIBUS, *seu* HELICIBUS.

Archimedes Dositheo S.

T*Heorematum ad Cononem transmissorum*, pro quibus assiduè literis à me contendis ut demonstrationes conscribam, plerorumque quidem scriptas habes in iis quas *Heraclides* pertulit; ipsorum verò quasdam etiam in hoc libello scriptas ad te mitto. Nè mireris autem, quòd post diutiorem temporis moram eorum demonstrationes edimus. Hoc enim accidit fieri, quia priùs voluerim iis exhibere, qui in Mathematicis occupantur, & ea libenter perscrutari volunt: * quales enim in *Geometria* speculationes, non bene tractabiles initio visæ, tempore elaboratæ perfectiorem accipiunt? *Conon* certè non sufficiens ipsorum inquisitioni tempus nactus vitam commutavit, obscuritate involuta relinquens; cùm & hæc omnia reperisset, & alia multa pervestigâsset, longiusque promovisset *Geometriam*: scimus enim in illo fuisse non mediocrem Mathematum peritiam, nec non industriam eximiam: à *Cononis* autem excessu cùm anni plures effluxerint, Problematum nullum à quovis percepimus solicitari. Volo autem eorum unumquodque singillatim producere * * * ut redarguantur qui præ se ferunt omnia invenisse, nullam proferentes eorum de-

vel quot: fortè legendum πόσα pro ποῖα.

Hîc in editis libris interseruntur hæc verba: καὶ γὰρ συμβαίνει δύο τινὰ τῶν ἐν αὐτῷ μὲν κεχωρισμένα· τέλους δὲ ποτ' ἐσπίμεν. quorum mentem assequi nequeo. Locus proculdubio mendosus & mutilus: è conjectura sic interpolata redderem: lego καὶ γὰρ συμβαίνει δύο τινὰ τῶν ἐν αὐτῷ εἶναι κεχωρισμένα· τέλους δὲ ποτθήσαμεν. Contigit enim duo quædam eorum quæ in illo (*Cononis* scripto) separatim apposita sunt, falsa esse; * *ποτίθει pro προστίθει, vel προστίθετι. Habetur apud Theocr. Idyl. 14 v. 45. imò infra hic. prop. 4.* quæ quidem ultimo in fine proponemus, ut &c.

mon

monstrationem, * interdumque quæ impossibilia sunt profitentes invenisse: hæc autem quænam Problemata sunt; & *quorum missas habes demonstrationes; & quænam in hoc libro perlata *comprobamus*, tibi declarabo. Primum itaque Problematum fuit: *Sphærâ datâ, spatium planum invenire sphæræ superficiei æquale:* quod quidem primò manifestum evasit *edito de Sphæra libro*; quippe cùm ostensum sit, *quòd omnis sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli eorum qui in sphæra*; liquet quomodo possibile sit invenire planum spatium æquale superficiei sphæræ. Secundum verò: *Dato cono vel cylindro, sphæram invenire æqualem cono vel cylindro.* Tertium verò: *Datam sphæram plano secare, ita ut ejus portiones inter se præstitutam habeant rationem.* Quartum autem: *Datam sphæram plano secare, ita ut superficiei portiones assignatam inter se rationem habeant.* Quintum verò: *Datam sphæræ portionem datæ sphæræ portioni assimilare.* Sextum verò: *duabus sphæræ, seu ejusdem seu diversæ, portionibus datis; invenire sphæræ portionem quandam, quæ sit ipsa quidem uni segmentorum similis, superficiem verò æqualem habeat superficiei alterius portionis.* Septimum: *A data sphæra portionem resecare plano, ita ut portio ad conum basin habentem eandem cum portione, & altitudinem æqualem præstitutam habeat rationem, non majorem illa, quam habent tria ad duo.* Horum quidem modò dictorum omnium demonstrationes pertulit *Heraclides.* Quod autem post hæc separatim appositum: falsum erat; est autem hujusmodi: *Si sphæra plano secetur in inæqualia portio major ad minorem duplicatam habet rationem ejus, quam habet major superficies ad minorem.* Quod verò hoc falsum sit, ex antea missis manifestum est. Quin seorsim istis adscriptum erat & hoc: *Si sphæra plano secetur inæqualiter, ad rectos diametro cuidam ex iis qui in sphæra, portio major ad minorem eandem obtinebit rationem, quam diametri pars major ad minorem:* major enim portio sphæræ ad minorem habet

* ἃ ποθ', *lego* οἱ ποθ'.

* τίνων ὧν, *deleo* ὧν.

9 *II. de sph.*

Ibid.

bet minorem quidem quàm duplicatam rationem ejus quam habet major superficies ad minorem, majorem verò quàm sesquialteram. Erat verò sepositorum problematum ultimum etiam falsum: *quòd, si sphæræ alicujus diameter secetur, ita ut quod à majori segmento fit quadratum triplum sit quadrati, quod à segmento minori, perque sectionis punctum actum planum diametro perpendiculare sphæram secet, erit talis specie figura, qualis est major sphæræ portio, maxima portionum quarumvis aliarum æqualem habentium superficiem. Quòd autem hoc sit falsum, constat ex antea missis theorematis:* etenim demonstratum est, *quòd hæmisphærium maxima est portionum, sub æquali comprehensarum superficie.* Post hæc verò de cono proposita sunt & hæc: si rectanguli coni sectio manente diametro circumvolvatur, ita ut diameter sit axis; à rectanguli coni sectione descripta figura vocetur *Conoides*; & si conoideam figuram planum contingat; plano verò contingenti ductum parallelum aliud planum conoidis aliquam portionem abscindat, abscissæ qnidem portionis basis appelletur planum abscindens, vertex verò punctum, ad quod aliud planum *conoides* tangit. Quinetiam si dicta figura plano secetur ad axem recto, quod sectio quidem circulus erit perspicuum est; *Quòd verò resecta portio sesquialtera erit coni basin habentis eandem cum portione, & æqualem altitudinem,* demonstrare oportet. Ac si *Conoidis* duæ portiones planis resecentur utcunque ductis, quòd equidem sectiones erunt *oxygoniorum conorum* sectiones, patet; siquidem resecantia plana non sint ad axem recta: quòd verò portiones hanc inter se rationem habent, quam potentiâ inter se habent quæ ab ipsarum verticibus ducuntur axi parallelæ usque ad secantia plana, demonstrandum est. Horum autem demonstrationes *ita tibi mandantur: post ista verò de *Helice* proposita fuerunt hæc. Est verò quasi genus aliud problematum, *nihil habens commune cum prædictis: de

vid. 26.

* οὕτω *fortè subest aliquid errati.*

* *lego* ἐπίκοινον ἔχοντα *pro* ἐπικείνων, ἔοντα.

de quibus in hoc ipſo libello demonſtrationes tibi conſcripſi. Sunt autem hæc: [illa ſubjungit, quæ habentur infrà in Prop. 24. 18. 27. 28.] Horum à me, & aliorum de Helice demonſtrationes in hoc libello ſcribuntur.

PRæmittuntur autem, ſicut & aliis Geometricis, *quæ uſum habent ad ipſorum demonſtrationem. Aſſumo verò & in his, ex iis quæ in libris extant antehac editis, hæc lemmata. *Inæqualium linearum &c.

* *Innuit II. primas propoſitiones, quæ lemmatica ſunt, et ſequentium demonſtrationi præſtratæ.* * *Vide 5. ax. libri I. de ſph. & cyl.*

Prop. I.

Si in aliqua linea (A G) *ferantur puncta quoddam æquè ſibi ipſi velociter latum, & ſumantur in illa duæ lineæ* (A B, B G); *ſumpta eandem inter ſe rationem habebunt, quam tempora, in quibus punctum rectas tranſierit.* Fig. 69. 70.

Tempora repræſententur à rectis $\alpha\beta, \beta\gamma$. & * ſumantur B M, B N * *poſt.* utcunque multiplices rectarum B A, B G; & $\beta\mu, \beta\nu$ pariter multiplicia temporum $\beta\alpha, \beta\gamma$: & quia motus [a] æquè veloces ſunt, erit $\beta\mu$ [a] *hyp.* tempus motûs continuati per B M; & $\beta\nu$ tempus motûs per B N. Quod ſi recta B M major ſit rectâ B N, liquet (ob motûs ſuppoſitam ἰσοταχίαν) eſſe tempus $\beta\mu$, quo peragitur B M, majus tempore $\beta\nu$, quo peragitur B N; & ſimili ratione ſi B M = B N, eſſe correſpondenter $\beta\mu = \beta\nu$. [d] unde erit A B. B G :: $\alpha\beta. \beta\gamma$. *Q. E. D.* [d] *5 def. V.*

Prop. II.

Si duorum punctorum utroque ſecundùm lineam quandam, non per unam eandem, æquè ſibimet velociter lato; ſumantur in utraque linea duæ lineæ (A B, B C, & L M, M N) *& tùm primæ* (A B, L M) *in æqualibus temporibus a punctis tranſigantur, tum etiam ſecundæ* (B C, M N); *eandem inter ſe rationem habebunt ſumptæ lineæ.* Fig. 71. 72.

Lationis per A B, & L M tempus ſit X; & lationis per B C. M N tempus ſit Y; eſtque A B. B C [a] :: (X. Y [a] ::) L M. M N. *Q. E. D.* [a] *1 hujus. Prop.*

Prop. III.

Datis quotlibet circulis, recta ſumi poteſt major circumferentiis circulorum.

Circulis [a]circumſcribantur polygona quævis, [b] liquet rectam eorum perimetris æqualem circulorum excedere circumferentias,

[a] *per aliquam 4ti elem.*
[b] *2.1. de ſph.*

Prop. IV.

Datis duabus lineis inæqualibus rectâ (R) *& circuli circumferentia* (P), *ſumi poteſt recta, minor quidem datarum linearum majore, major autem minore.*

Hoc è quantorum homogeneitate, & adeò ab exceſſûs diviſibilitate ſatis perſpicuum eſt. Sed cum auctore, ſit alterutra R major; & exceſſus R—P multiplicatus per aliquem numerum N [a]excedat R. Erit $R-\frac{R}{N}\sqsubset P$. Nam quia $R-P \ast: N$ [b] $\sqsubset R$. [c]erit $R-P \sqsubset \frac{R}{N}$. ergo transponendo R [d] $\sqsubset \frac{R}{N}+P$. [e] & $R-\frac{R}{N}\sqsubset P$. *Q.E.F.*

[a] *5 ax.1.de ſph.*
[b] *conſtr.*
[c] *7 ax.1.*
[d] *4. ax. 1.*
[e] *5. ax. 1.*

Prop. V.

Fig. 73. *Dato circulo, & recta* (B T) *tangente circulum, poteſt à circuli centro* (A) *duci recta* (A T) *ad tangentem, ita ut à tangente & circuli circumferentia intercepta recta* (D T) *ad radium* (A D) *minorem rationem habeat, quàm circuli arcus* (B D) *qui eſt inter contactum* (B) *& eductam* (A T) *ad datam quamcunque circuli circumferentiam* (P).

Fig. 74. Accipiatur recta quapiam X [a]major quàm P; & agatur diameter N M ad B T parallela, cui occurrat recta B D ſecans circulum in D, ita ut intercepta D F major ſit quàm X (id quod fieri poteſt, quoniam ſic interceptæ ab M versùs partes F creſcunt ad infinitum). Jam trajectâ A T per D, dico factum. Nam I D. D A (*:: B D. D F [b] $\sqsupset$ arc B D. D F [c] $\sqsupset$ arc B D. X) [c] $\sqsupset$ arc B D. P.

[a] *3 hujus.*
[a] *4. 6.*
[b] *1. ax. 1. de ſph. & 8. 5.*
[c] *conſt. & 8. 5.*

Prop. VI.

Fig. 75. *Dato circulo, & in circulo rectâ* (Z D) *quæ ſit minor diametro, poteſt à circuli centro* (A) *ad peripheriam projici recta* (A G) *ſecans datam*

tam in circulo rectam (Z D), *ita ut recta* (G H) *inter peripheriam & rectam in circulo datam comprehenſa ad conjunctam* (G Z) *à termino* (G) *projectæ, qui eſt in peripheria ad alteram extremitatem* (Z) *datæ in circulo rectæ, præſtitutam habeat rationem* (R ad S); *modò tamen data ratio minor ſit ea, quam habeat dimidia* (Z E), *datæ in circulo ad ductam è centro ipſi perpendicularem* (A E).

Ducatur diameter N M ad D Z parallela, cui occurrat tangens Z S, & connectatur A Z; & ob angulos A Z E, Z A S [a] paret, & [b] rectos Z E A, A Z S, erunt triangula Z E A, A Z S ſimilia. [c] unde A Z. Z S :: Z E. A E [d] ⊏ R. S. fiat R. S :: A Z. X; [e] ergo X ⊏ Z S. Igitur ſi per Z (quod fieri poſſe *conſtat) tranſeat recta, ſecans circulum in G, ſic ut inter diametrum & G intercepta G K æquetur ipſi X (ſecabit autem ad partes D, quia G K ⊏ Z S, & angulum S Z M nulla ſecet major quam S Z); & connectatur A G; quoniam G H. G Z :: [c] G A (Z A). G K [f] :: Z A. X [g] R. S [h] :: G H. G Z, conſtat propoſitum. *

a 29. 1.
b *hyp.* & 16. 3.
c 4. 6.
d *hyp.*
e 10. 5.
* *Id nos alibi, quo modo fieri poſſit, oſtendimus.*
f *conſt.* & 7. 5.
g *conſtr.*
h 11. 5.

* *ſcil. ad 6. Vides conditionem apponi meritò: namſi eſſet* G H. G Z (*vel* G A. G S) :: R. S :: Z E. A E :: Z A. Z S. *eſſent* G S, Z S *æquales*; q. f. n.

Prop. VII.

Eſdem datis, & rectâ (D Z) *protractâ poteſt è centro recta* (A H) *educi, ita ut quæ* (G H) *fuerit inter peripheriam & protractam ad conjunctam* (G Z) *à termino interceptæ ad terminum protractæ propoſitam habeat rationem* (R ad S), *dummodo data ratio major fuerit eâ, quam habet dimidia* (Z E) *datæ in circulo ad ductam è centro ipſi perpendicularem* (A E). Fig. 75.

Ducatur enim tangens Z S, & connectatur A Z, & cætera ut in præcedenti. Eſtque Z A. Z S [a] :: Z E. A E [b] ⊐ R. S. fiat R. S :: Z A. X; erit idco X ⊐ Z S. itaque ducatur Z K, ita ut intercipiatur G K = X (quod conſtat fieri poſſe intra angulum A Z S) eſtque G H. G Z [a] :: A G (A Z) G K [c] :: A Z. X [d] :: R. S :: [e] G H. G Z. ergo factum.

a 4. 5.
b *hyp.*
c *conſt.* & 7. 5.
d *conſt.*
e 11. 5.

Prop. VIII.

Dato circulo, & in circulo rectâ (Z D) *quæ minor diametro, & aliâ* (Z S) *tangente circulum ad in circulo datæ terminum* (Z), *poteſt à circuli centro* (A) *projici recta quædam* (A L), *ita ut pars ejus* (H G) *accepta inter circumferentiam circuli, ac datam in circulo rectam ad* Fig. 76.

partem

partem (L Z) *à tangente interceptam habeat propoſitum rationem* (R ad S); *ſiquidem data ratio ſit minor eâ quam habet ſemiſſis* (Z E) *datæ in circulo ad ductam è circulo ipſi perpendicularem* (A E).

a 4. 6.
b *hyp.*
c 10. 5.
d 5. 4.
e 4. 6.
f 16. 6.
g 35. 3.
h 7. 5.
k 1. 6.
l *conſt.* & 7. 5.
m 35. 3. & 16. 6.
n 7. 5.
o 11. 5.
p 19. 5.
q *conſt.*

Sit diameter N M ad D Z parallela, tangenti L Z occurrens in S; fiátque R. S :: A Z. Z T. unde cùm ſit A Z. Z S [a] :: Z E. A E [b] ⊐ R. S. [c]erit Z T ⊏ Z S. Per puncta A, S, T [d] ducatur circulus, quem ſecet A Z producta in Y, ducatúrque A X, ſic ut L X = Z Y (quod fieri poſſe conſtat ad alteras partes diametri AP, tranſeuntis inter Z, T; ob Z T ⊏ Z S, & angulum A Z T rectum) hæc autem (A X) tangentem ſecet in L, circulum primò poſitum in G, rectam Z D in H. Dico factum.

Nam L A. H A :: [e] L S. Z S. [f] unde L A * Z S = H A * L S. Item L T * L S [g] = L A * L X. [h] quare L T * L S. H A * L S ([k] L T. H A) :: L A * L X. L A * Z S [l] :: L X. Z S [l] :: Z Y. Z S [m] :: Z T. Z A [n] :: Z T. A G. [o] :: L T. H A [p] :: Z T — L T. A G — H A (hoc eſt) :: L Z. G H. ac invertendo G H. L Z :: (Z A. Z T [q] ::) R. S. *Q.E.F.*

Prop. IX.

Fig. 77. *Iiſdem datis, ac in circulo datâ lineâ* (D Z) *protractâ, poteſt è centro circuli ad protractam educi recta* (A H); *ita ut quæ* (G H) *eſt inter peripheriam & productam ad interceptam* (L Z) *ex tangente ad contactum, præſignatam ſortiatur rationem* (R ad S), *ſi modò data ratio major ſit eâ, quam habet data in circulo ſemiſſis* (Z E) *ad ductam ipſi è centro perpendicularem* (A E).

Conſtruitur & demonſtratur eodem prorſus modo quo præcedens; tantùm hic faciendo A Z. Z T :: R. S, evadit Z T ⊐ Z S; & inde recta A H occurrit circulo infra tactum ad partes S. quid plura?

Vides in duobus his problematis deſiderari, ut intercipiatur L X = Z Y, id quod præſtari poteſt ope primæ conchoidis, cujus polus A, chorda S T, ſagitta Z Y; ejus enim cum circulo A S T interſectio determinabit punctum X. at per conicas quoque ſectiones idem effici poteſt, utpote ſolidum Problema.

Prop. X.

Fig. 78. *Si lineæ quotcunque ponantur deinceps æquales ſeſe excedentes* (a, b, c, d, e, f) *fuerit autem exceſſus æqualis minimæ* (a); *& aliæ lineæ ponantur, multitudine quidem æquales illis, magnitudine verò ſingulæ æquales*

quales maximæ (f); *quadrata ab æqualibus maximæ adsumentia quadratum ex maxima, & comprehensum (rectangulum) à minima & æquali omnibus sese æqualiter excedentibus, tripla erunt omnium quadratorum ab illis, quæ sese excedunt.*

$7ff + fa + ea + da + ca + ba + aa = 3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee + 3ff.$

Clariùs forsan & breviùs exprimatur, si sit quæcunque series æqualiter se continuò excedentium, incipiens à puncto (seu nihilo) inclusivè, tripla summa quadratorum ex his adæquabitur summæ quadratorum è totidem æqualibus maximæ, unà cum rectangulis è mininima in omnes.

Nam summa quadratorum è tot æqualibus [m] maximæ est. m 4. 2.

	ff	
0 $a.b.c.d.e.f$	$aa + ee + {}^*2ae$	$({}^*2ae.$
0 1.2.3.4.5.6.	$bb + dd + {}^*2bd$	$({}^*4ad.$ ob $b = 2a.$
6.5.4.3.2.1.0.	$cc + cc + {}^*2cc$	$({}^*6ac.$ ob $c = 3a.$
	$dd + bb + {}^*2db$	$(8ab.$ ob $d = 4a.$
	$ee + aa + {}^*2ea$	$(10aa.$ ob $e = 5a.$
	ff	

Item $ff^* = {}^n6af\dagger = {}^n af + 2ae + 2ad + 2ac + 2ab + 2aa = ff.$

Similiq; discursu, $ae + 2ad + 2ac + 2ab + 2aa = ee$

$ad + 2ac + 2ab + 2aa = dd$ * ob $f = ba.$

$ac + 2ab + 2aa = cc$ † ob $5f = 2e + 2d + 2c + 2b + 2a.$

$ab + 2aa = bb$

$aa = aa$

Horum summa est, $af + 3ae + 5ad + 7ac + 9ab + 11aa.$ n 1. 2.

Quæ quidem summa excedit summam rectangulorum supra positam per $af + ae + ad + ac + ab + aa.$ quod si igitur adjiciatur hic excessus summæ quadratorum suprà collocatæ, perspicuum est conflari $3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee + 3ff.$ Consimilis discursus cuilibet accommodari possit linearum multitudini.

Corollaria.

1. Itaque constat hinc quòd omnia quadrata ab æqualibus maximæ eorum quæ ab æqualiter sese excedentibus minora sunt, quàm tripla.

2. Reliquorum verò dempto maximæ quadrato majores sunt quàm tripla, hoc est esse $6ff \sqsubset 3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee$, quia scilicet $ff = 6af \sqsubset af + ae + ad + ac + ab + aa$, adeóque ex superiore æquatione hinc auferendo $ff + af + ae + ad + ac + ab + aa$,

illinc $2ff$ remanebit $6ff \sqsubset 3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee + ff$.

3. Quinetiam ideo si similes figuræ describantur, tum ab omnibus sese æqualiter excedentibus, tum ab æqualibus maximæ; figuræ ab æqualibus maximæ minores quidem erunt quàm triplæ earum, quæ ab æqualiter sese excedentibus, reliquarum verò demptâ figurâ quæ fit à maxima majores quàm triplæ: nam quadratorum & similium figurarum eadem prorsus est ratio.

Schol. Hinc pro cognoscenda quadratorum cujuscunque progressionis Arithmeticæ summa regulæ emergunt notatu dignæ.

1. Si series incipiat ab o, primúsque post o terminus sit a, ultimus verò (seu maximus) sit f; & terminorum numerus dicatur n; erit $\frac{nff}{3} + \frac{nfa}{6}$ (vel $\frac{2nff + nfa}{6}$) æqualis summæ quadratorum. Nam $\frac{nf}{2}$ æquatur summæ terminorum (id clarissimè cernis in hujusce propositionis figura) ergo $nff + \frac{nfa}{2}$ æquatur triplæ summæ quadratorum.

Hinc erit tripla summa quadratorum. ad summam quadratorum è totidem æqualibus maximo. ut $f + \frac{a}{2}$ ad f, vel ut $1 + \frac{a}{2f}$ ad 1.

2. Si series incipiat ab o, & primus ab eo terminus sit 1; erit summa quadratorum $\frac{nff}{3} + \frac{nf}{6}$. (è priore).

Hinc summa quadratorum tripla, ad summam quadratorum è totidem æqualibus maximo, ut $2n-1$ ad $2n-2$.

Nam $nff + \frac{nf}{2}.\ nff :: f + \frac{1}{2}.f :: n-1 + \frac{1}{2}.\ n-1$ (ob $f = n-1$) $:: n - \frac{1}{2}.\ n-1 :: 2n-1.\ 2n-2$.

Item illa ad hanc se habet ut $1 + \frac{1}{2n-2}$ ad 1.

3. Eodem posito, erit summa quadratorum $\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$; vel $\frac{n^3}{3} - \frac{nn}{2} + \frac{n}{6}$. Nam ob $n-1 = f$ erit $nn - 2n + 1 = ff$. quare $2nff = 2n^3 - 4nn + 2n$. & $nf = nn - 1$ quæ collecta dant $2n^3 - 3nn + n$.

4. In quacunque Progressione, si minimus terminus sit a, excessus x erit summa quadratorum $\left.\begin{matrix} naa - nn \\ -n \end{matrix}\right\} a\ x + \frac{2n^3 - 3nn + n}{6} xx$.

Nam

Nam summa quadratorum est

$$a.\ a+x.\ a+2x.\ a+3x$$

$$\begin{array}{l} aa+0+0 \\ aa+2ax+xx \\ aa+4ax+4xx \\ aa+6ax+9xx \\ \hline \end{array}$$

Summa $\left.\begin{array}{l} naa+{}^{*}nn \\ \quad -n \end{array}\right\} ax$ $\quad \dfrac{+2n^3-3nn+n}{6}\,xx$

* Nam summa 0.2.4.6. $= nn - n$.

5. Ex his porro colligitur in istis progressionibus quæ à nihilo incipiunt, quo major est terminorum numerus, eò quadratorum ex inæqualibus summam triplicatam, ad æqualitatem cum summa quadratorum è totidem æqualibus maximo propiùs accedere, nam si pro substituatur ea major quilibet g, quia $1+\frac{a}{2g} \sqsupset 1+\frac{a}{2f}$ liquet triplam summam quadratorum ex illis quorum maximus terminus est g, minus inæqualem esse summæ quadratorum è totidem æqualibus maximo, quam ubi maximus terminus est f.

6. Adeóque si numerus terminorum infinitus sit, tripla summa quadratorum ex inæqualibus justè adæquabitur quadratis è maximo, nam si ultimus terminus sit Z, erit $\frac{a}{zz}=0$ quia a ad z (nedum ad zz) nullam habebit proportionem. Cæterùm fontem hìc uberrimum aperuit *Archimedes*, à quo plurimi in fundum Mathematicum cuvii redundârunt.

Pertentando colligetur isthoc hoc pacto.

Series 1ª.	0. 1. tripla 3. 2 × 1 == 2.	ratio $1\frac{1}{2}$. 1.	Eodem modo procedit ratio ad infinitum, versus æqualitatem vergendo.
Series 2ª.	0. 1. 4 : tripla 15 3 × 4 == 12	ratio $1\frac{1}{4}$. 1.	
Series 3.	0.2.4.9. tripla 42 4 × 9 === 36	ratio $1\frac{1}{6}$. 1.	
Series 4.	0.1.4.9.16. tripla 90. 5 × 16 ===== 80.	ratio $1\frac{1}{8}$.1	

Prop. XI.

Si lineæ continuò ponantur quotlibet (Z A, Z B, Z C, Z D) *æquali excedentes; & aliæ lineæ ponantur* (*Z D, Z E, Z F) *multitudinem quidem unâ minores æqualiter sese excedentibus, magnitudine vero singulæ æquales maximæ* (Z D); *quadrata omnia ab æqualibus maximæ*

*vel ZE, ZF, ZG.

illinc $2ff$ remanebit $6ff = 3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee + ff$.

3. Quinetiam ideo si similes figuræ describantur, tum ab omnibus sese æqualiter excedentibus, tum ab æqualibus maximæ; figuræ ab æqualibus maximæ minores quidem erunt quàm triplæ earum, quæ ab æqualiter sese excedentibus, reliquarum verò demptâ figurâ quæ fit à maxima majores quàm triplæ: nam quadratorum & similium figurarum eadem prorsus est ratio.

Schol. Hinc pro cognoscenda quadratorum cujuscunque progressionis Arithmeticæ summa regulæ emergunt notatu dignæ.

1. Si series incipiat ab o, primúsque post o terminus sit a, ultimus verò (seu maximus) sit f; & terminorum numerus dicatur n; erit $\frac{nff}{3} + \frac{nfa}{6}$ (vel $\frac{2nff + nfa}{6}$) æqualis summæ quadratorum. Nam $\frac{nf}{2}$ æquatur summæ terminorum (id clarissimè cernis in hujusce propositionis figura) ergo $nff + \frac{nfa}{2}$ æquatur triplæ summæ quadratorum.

Hinc erit tripla summa quadratorum. ad summam quadratorum è totidem æqualibus maximo. ut $f + \frac{a}{2}$ ad f, vel ut $1 + \frac{a}{2f}$ ad 1.

2. Si series incipiat ab o, & primus ab eo terminus sit 1; erit summa quadratorum $\frac{nff}{3} + \frac{nf}{6}$. (è priore).

Hinc summa quadratorum tripla, ad summam quadratorum è totidem æqualibus maximo, ut $2n-1$ ad $2n-2$.

Nam $nff + \frac{nf}{2}.\ nff :: f + \frac{1}{2}.f :: n-1 + \frac{1}{2}.\ n-1$ (ob $f = n-1$) $:: n - \frac{1}{2}.\ n-1 :: 2n-1.\ 2n-2$.

Item illa ad hanc se habet ut $1 + \frac{1}{2n-2}$ ad 1.

3. Eodem posito, erit summa quadratorum $\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$; vel $\frac{n^3}{3} - \frac{nn}{2} + \frac{n}{6}$. Nam ob $n-1 = f$ erit $nn - 2n + 1 = ff$. quare $2nff = 2n^3 - 4nn + 2n$. & $nf = nn - 1$ quæ collecta dant $2n^3 - 3nn + n$.

4. In quacunque Progressione, si minimus terminus sit a, excessus x erit summa quadratorum $\left.\begin{matrix} naa - nn \\ -n \end{matrix}\right\} a\ x + \frac{2n^3 - 3nn + n}{6} xx$.

Nam

Nam ſumma quadratorum eſt

$a.\ a + x.\ a + 2x.\ a + 3x$

$aa + 0 + 0$
$aa + 2ax + xx$
$aa + 4ax + 4xx$
$aa + 6ax + 9xx$

Summa $naa + {}^{*}nn \left\} ax \right.$ $- n \left\}$

$+ 2n^3 - 3nn + n \over 6$ xx

* Nam ſumma $0.2.4.6. = nn - n.$

5. Ex his porro colligitur in iſtis progreſſionibus quæ à nihilo incipiunt, quo major eſt terminorum numerus, eò quadratorum ex inæqualibus ſummam triplicatam, ad æqualitatem cum ſumma quadratorum è totidem æqualibus maximo propiùs accedere, nam ſi pro f ſubſtituatur ea major quilibet g, quia $1 + \frac{a}{2g} > 1 + \frac{a}{2f}$ liquet triplam ſummam quadratorum ex illis quorum maximus terminus eſt g, minus inæqualem eſſe ſummæ quadratorum è totidem æqualibus maximo, quam ubi maximus terminus eſt f.

6. Adeóque ſi numerus terminorum infinitus ſit, tripla ſumma quadratorum ex inæqualibus juſtè adæquabitur quadratis è maximo, nam ſi ultimus terminus ſit Z, erit $\frac{a}{zz} = 0$ quia a ad z (nedum ad zz) nullam habebit proportionem. Cæterùm fontem hìc uberrimum aperuit *Archimedes*, à quo plurimi in fundum Mathematicum fluvii redundârunt.

Pertentando colligetur iſthoc hoc pacto.

Series 1ª. 0. 1. tripla 3. $2 \times 1 = 2.$ } ratio $1\frac{1}{2}$. 1.
Series 2ª. 0. 1. 4 : tripla 15 $3 \times 4 = 12$ } ratio $1\frac{1}{4}$. 1.
Series 3. 0.2.4.9. tripla 42 $4 \times 9 = 36$ } ratio $1\frac{1}{6}$. 1.
Series 4. 0.1.4.9.16. tripla 90. $5 \times 16 = 80.$ } ratio $1\frac{1}{8}$. 1.

} Eodem modo procedit ratio ad infinitum, versùs æqualitatem vergendo.

Prop. XI.

Si lineæ continuò ponantur quotlibet (Z A, Z B, Z C, Z D) *æquali ſeſe excedentes; & aliæ lineæ ponantur* (*Z D, Z E, Z F) *multitudine quidem unâ minores æqualiter ſeſe excedentibus, magnitudine verò ſingulæ æquales maximæ* (Z D); *quadrata omnia ab æqualibus maximæ*

* vel Z F, Z F, Z G.

DZq + EZq + FZq
DZq + CZq + BZq ⊐
DZq. DZ×AZ + DAq/3
EZq + FZq + GZq.
CZq + BZq + AZq. ⊏
EZq. EZ×AZ + EAq/3.

xima ad quadrata ſeſe æqualiter excedentium ſine minima (ZA) minorem rationem habebunt, quàm quadratum maximæ ad æquale utrique, tum comprehenſo ſub maxima, & minima, tum tertia parti quadrati exceſſûs, quo maxima excedit minimam; ad quadrata verò ſeſe æqualiter excedent um ſine quadrato maximæ majorem eâdem ratione.

Eſt enim AZ×: DZ + EZ + FZ + (DAq + EAq + FAq)/3

a 3.2. et 1. ax. 1 [a] = AZq + AZq + AZq + AZ×: DA + EA + FA: + (DAq + EAq + FAq)/3 ⊐ AZq + AZq + AZq: + AZ×: 2DA + 2CA + 2BA: + DAq + CAq + BAq (quia ſcilicet

b 1 cor. 10. b. DA + EA + FA ⊐ 2DA + 2CA + 2BA; [b] &

c 4.2. & 2. ax. 1. (DAq + EAq + FAq)/3 ⊐ DAq + CAq + BAq) [c] = DZq +

d 8. 5. CZq + BZq. [d] ergo DZq + EZq + FZq. DZq + CZq + BZq ⊐ (DZq + EZq + FZq. AZ×: DZ + EZ + FZ +

e 12. 5. (DAq + EAq + FAq)/3 [e] ::) DZq. AZ × DZ + DAq/3.

Similem adhibendo diſcurſum, quoniam EA + FA + GA ⊏ 2CA + 2BA; & (EAq + FAq + GAq)/3 [g] ⊏ CAq + BAq;

g 2 cor. 10 b. erit AZ×: EZ + FZ + GZ + (EAq + FAq + GAq)/3

h 8. 5. ⊏ CZq + BZq + AZq. [h] quare EZq + FZq + GZq. CZq

k 12. vel 15. 5. + BZq + AZq ⊏ (EZq + FZq + GZq. AZ×: EZ + FZ + GZ + (EAq + FAq + GAq)/3 [k] ::) EZq. AZ × EZ + EAq/3.

Coroll.

Et proinde ſi ſimiles figuræ deſcribantur ab omnibus, tam ab inæqualiter ſeſe excedentibus quàm ab æqualibus maximæ; figuræ omnes, quæ ab æqualibus maximæ ad illas quæ ab æqualiter ſeſe excedentibus, ſine figura quæ à minima, minorem rationem quàm quadratum à maxima ad æquale utrique ſimul & comprehenſo ſub maxima

ac

ac minima, & tertiæ parti ejus quod eſt ab exceſſu, quo maxima exſuperat minimam; ad eas vero quæ ab iiſdem ſunt figuras ſine illa quæ à maxima, majorem eâdem ratione.

Schol.

Si D A = Z A, vel Z D = 2 Z A, liquet eſſe Z Dq. Z D * Z A + $\frac{D\,Aq}{3}$ :: 12. 7. [a]vel 3 Z Dq. 3 Z D * Z A + D Aq :: 12. 7. Nam [b] 3 Z Dq = 12 Z Aq. & 3 Z D * Z A [c] = 6 Z Aq, & D Aq [d] = Z Aq.

[a] 1. 5. [b] 4. 2. [c] 1. 6. [d] *hyp.*

Definitiones.

I.

Si in plano recta linea (A Z) *manente altero termino* (A) *æquali velocitate circumlata, reſtituatur denuo* (*iſtuc*) *unde profecta eſt; ſimul verò cum linea circumducta feratur punctum æquèvelociter ſibi ipſi, ſecundùm rectam* (A Z), *incipiens à manente termino* (A); *punctum helicem deſcribet.* Fig. 80.

Schol.

Itaque ſi dividatur recta A Z in quotcunque partes æquales A *b*, *bc*, *cd*, &c. & circumferentia à puncto B deſcripta in partes totidem æquales, ac ductis à centro A ad circumferentiæ diviſiones radiis, auferantur AB, AC, AD, &c ipſis A *b*, A *c*, A *d* &c ordine æquales, per puncta A B, C, D &c. tranſibit helix. Et hic modus eſt helicem deſcribendi.

II.

Vocetur itaque rectæ quidem terminus (A) *qui manet ipsâ circumductâ, principium Helicis.*

III.

Lineæ verò **ſitus, à quo cœpit recta* (A Z) *circumferri, principium revolutionis.*

* *vel potiùs ipſa linea primò poſita.*

IV.

Recta, (A Z) *quam quidem in prima revolutione perambulârit punctum in recta latum, prima vocetur; illa verò* (Z Y) *quam in ſecunda revolutione confecerit idem punctum, ſecunda; & conſimiliter aliæ juxta revolutionum numeros pariter denominentur.* Fig. 81.

V.

Spatium verò ſub helice (A P Z) *in prima revolutione deſcriptâ, & rectâ* (A Z) *quæ prima eſt, dicatur primum; quod autem continetur ab helice* (Z Q Y) *per ſecundam revolutionem deſcriptâ, & rectâ ſecundâ* (Z Y) *ſecundum vocetur; aliáque deinceps eodem modo nominentur.*

Not. Nonnunquam ſpatium ſecundum dicitur incluſo primo, juxta definitionem hanc; at *ſubinde ſecundum dicitur, excluſo primo; & ita de reliquis.

* *in 27 hujus. b.*

VI.

Et deſcriptus circulus, centro quidem puncto (A) *quod eſt principium Helicis, intervallo verò rectâ* (A Z) *quæ prima eſt, primus appelletur; deſcriptus autem centro quidem eodem, intervallo verò* (A Y) *duplâ rectâ, ſecundus vocetur; & alii continuò poſt hos ad eundem modum.*

VII.

Fig. 82. *Ac ſi à puncto* (A) *quod eſt principium Helicis ducatur aliqua recta quædam linea* (A B); *quæ ſunt ad hujus rectæ partes eaſdem* (F Z) *versùs quas revolutio fit, antecedentia vocentur, quæ verò ad alteras* (E A) *conſequentia.*

Prop. XII.

Fig 83. *Si in helicem* (A B C D E Z) *unâ revolutione deſcriptam ab helicis principio* A) *incidant rectæ quotlibet* (A B, A C, A D, A E) *æquales inter ſe angulos facientes: æqualiter ſeſe excedunt.*

Sint exceſſus C R, D S, E T; & centro A per Z ducatur circulus, ad quem protrahantur A B, A C, A D, A E; & ob angulos M A N, N A O, O A P pares, [a]liquet arcus M N, N O, O P æquari. [b]ergo & tempora per M N, N O, O P æquantur, [c]hoc eſt tempora per R C, S D, T E. [b]ergo ipſæ R C, S D, T E æquantur. *Q E D.*

a 26. 3.
b 1 *hujus.*
c 1 *def. huj.*

Lemma.

Fig. 84. In triangulo B A C recta A G biſecet angulum B A C, erit A B + A C ⊏ 2 A G.

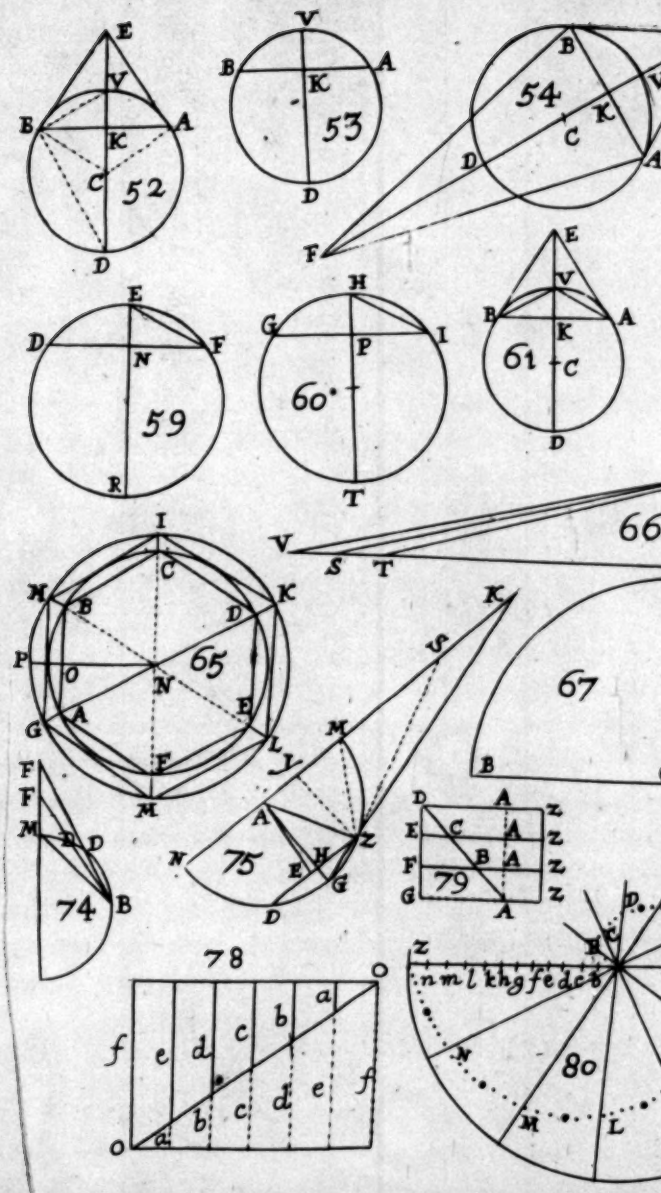
Per

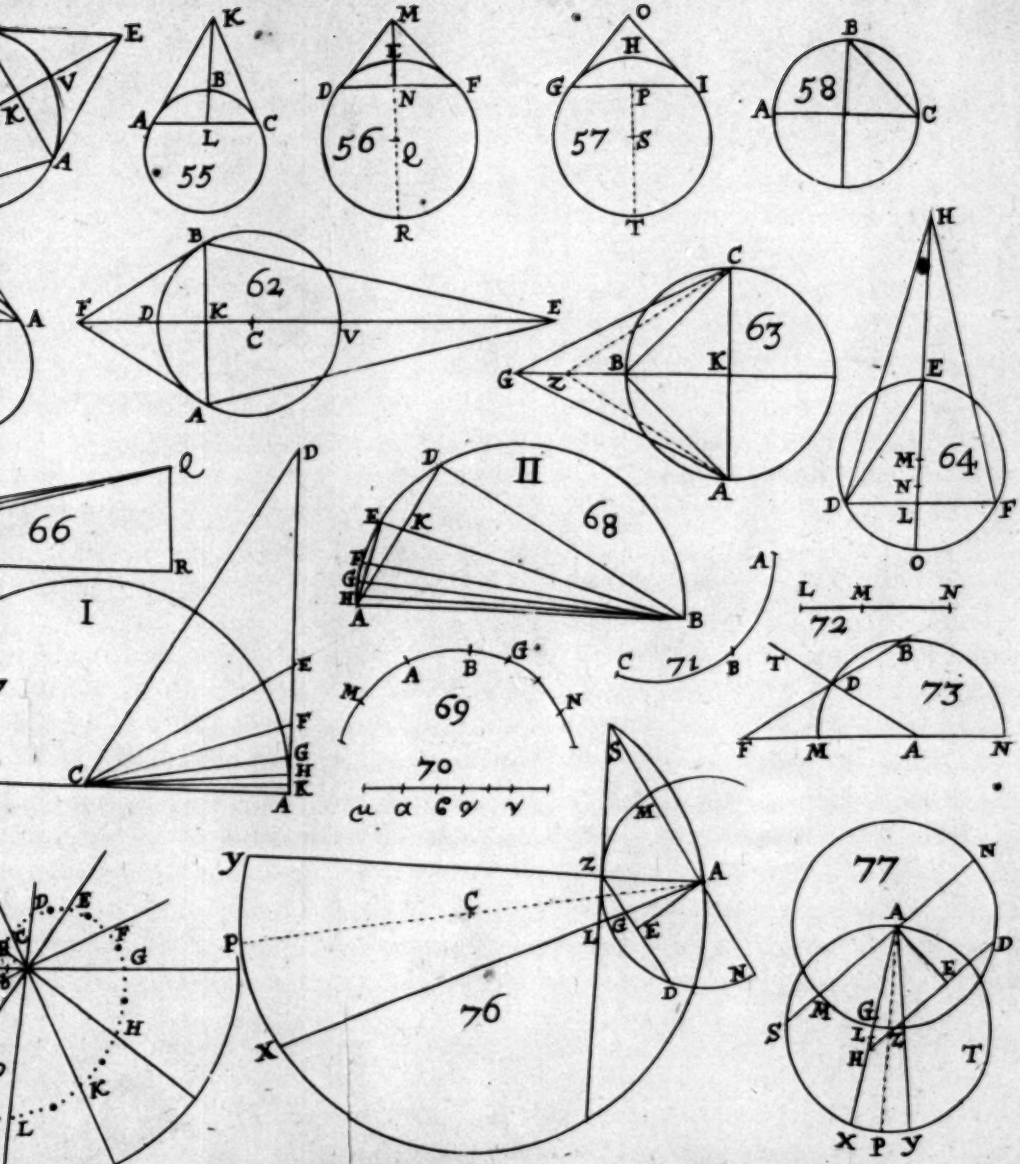
ins.
1.
7.c.

X 4.
5.

hujus

7.


52
53
54
59
60
61
66
65
67
74
75
79
78
80



Archimedes. Pag. 54. 3.

* in 27 tra

Fig. 82.

Pappus 10 l
Fig 83.

a 26.3.
b 1 hujus.
c 1 def. huj.

Fig. 84.

Per G ducatur K L ad A G perpendicularis ; & per B fiat B H ad K L parallela. Eſtque B K [a] = H L. ergo L C ⊏ B K. (Nam C G. G B [b] :: C L. L H.) ergo A L + L C + A L (A K) — K B ⊏ A L + A K hoc eſt A C + A B ⊏ A K + A L [c] ⊏ 2 A G.

a 2. 6.
b 3. 6.
c 47. 1.

Prop. XIII.

Si recta linea (B C) *contingat helicem* (A B Z), *in uno tantùm puncto continget.*

Tangat enim, ſi fieri poteſt, duobus in punctis B, C ; & connectatur B C ; & angulum B A C biſecet recta A G, occurrens helici in D ; tangenti in G. eſtque A C — A D [a] = A D — A B. quare A C + A B [b] = 2 A D. Sed A C + A B [c] ⊏ 2 A G. ergo A D ⊏ A G. ergo punctum G eſt intra helicem ; & proinde B C non tangit ſpiralem, contra hypotheſin.

a 12 *hujus.*
b 2 *ax.* 1.
c *lemma praec.*

Prop. XIV.

Si in helicem (A B C Z) *primâ revolutione deſcriptam incidant duæ rectæ* (A B, A C) *à puncto* (A) *quod eſt principium helicis, & producantur ad circumferentiam primi circuli* (Z M N O) *eandem inter ſe rationem habebunt in helicem incidentes* (A B, A C) *quam circuli arcus* (Z M N, Z M O) *qui ſunt inter helicis terminum* (Z), *& terminos* (N, O) *à productis ad peripherias factos, ſumptis in antecedentia arcubus, ab helicis termino* (Z).

Pappi XIX. 4. Fig 86.

Eſt enim recta A B ad rectam A C, [a] ut tempus per A B ad tempus per A C ; [b] hoc eſt tempus per arcum Z M N ad tempus per arcum Z M O, [a] hoc eſt ut arcus Z M N ad arcum Z M O.

a 1 *hujus.*
b 1 *def hujus*

Coroll. Eodem diſcurſu quæcunque partes rectarum ad ſe ſunt, ut arcus eodem tempore peracti ; & totus radius ad quamcunque partem ipſius ſe habet, ut tota peripheria ad arcum eodem tempore pervolutum.

Prop. XV.

Et ſiquidem in helicem (A Z B C Y) *ex ſecunda revolutione deſcriptam inciderint rectæ* (A B, A C) *ab helicis principio* (A) ; *eandem rationem habebunt rectæ* (A B , AC) *quam dictæ peripheriæ* (Z M N, Z M O) *poſt acceptas integras circumferentias.* Fig. 87.

Rur-

Rurſus enim eſt recta A B ad A C, [a] ut tempus per A B ad tempus per A C, [b] hoc eſt ut tempus per totam circumferentiam, & arcum Z M N ad tempus per totam circumferentiam, & arcum Z M O, [a] hoc eſt ut tota circumferentia cum arcu Z M N ad totam circumferentiam cum arcu Z M O.

a 1 *hujus.*
b 1 *def. hujus.*

Sch. Eodem modo, de partibus oſtendetur, ut in *Coroll.* præcedentis, quod & ad ſequentia extendetur.

Nota vero poſſe dictarum peripheriarum rationes in quovis circulo circa centrum A deſcripto computari: rectæ enim A Z, A N, A O protractæ ſimiles perpetuo peripherias abſcindent.

Coroll. Eodem oſtendetur modo quòd ſi in helicem ex tertia revolutione deſcriptam inciderint rectæ, eandem inter ſe rationem habebunt, quam dicti arcus poſt totas circumferentias bis ſumptas: quin & ſimiliter quæ in alias helices incidunt, demonſtrantur eandem habere rationem, quam dicti arcus poſt integras circumferentias toties acceptas, quotus eſt numerus revolutionum unitate minutus, etiamſi altera incidens in terminum helicis cadat.

Prop. XVI.

Fig. 88. *Si helicem* (A B Z) *ex prima revolutione deſcriptam contingat recta linea* (S T); *& à contactu* (B) *connectatur ad punctum* (A) *quod eſt principium helicis; inæquales erunt anguli* (A B S, A B T) *quos facit tangens ad connexam; & quidem* (A B T), *qui in antecedentia, obtuſus eſt; qui verò* (A B S) *in conſequentia, acutus.*

Centro A per B ducatur circulus B D E G; liquet helicem extra hunc cadere versùs partes T, [a] quia verſus illas creſcunt ad helicem ductæ rectæ; unde angulus A B T angulo ſemicirculari A B D, & [b] proinde quovis acuto major eſt. Sit itaque, ſi fieri poteſt, rectus; [b] quamobrem B T tanget circulum B D E; unde [c] duci poterit recta A Γ ſecans tangentem in T, & circulum D, ita ut intercepta D T ſit ad radium A D in minori ratione, quàm arcus B D, ad arcum E G B. Occurrat A B circulo primo Z M N in N, & A D eidem in O, ac helici in H. eſtque componendo A T. A D ⊐ (arc E G B D. arc E G B [d] :: arc Z M N O. arc Z M N [e] :: A H. A B [f] :) A H. A D. [g] unde A T ⊐ A H; adeóque tangens intra helicem cadet, nec ideo tanget; quæ repugnant. quin potiùs angulus A B T obtuſus eſt, quique deinceps A B S acutus.

a 1 *def hujus.*
b 16. 3.
c 5 *hujus.*
d 4 *cor.* 33 6.
e 4 *hujus.*
f 7. 5.
g 10 5.

Coroll.

Coroll.

Haud abſimiliter oſtendetur, ſi & tangens helicem ad terminum (Z) contingat, idem evenire.

Prop. XVII.

Quinimò ſi helicem è ſecunda revolutione deſcriptam recta contingat, idem accidet.

Prorſus eâdem methodo demonſtratur quâ præcedens, niſi quòd hic loco prop. 14. adhibeatur prop. 15. hujus.

Coroll.

Eadem verò evenient, etiam ſi tangens ad finem helicis contingat.

Item ſimiliter oſtendetur, quòd ſi ex quacunque revolutione deſcriptam helicem recta quædam linea tangat, etiamnum ad finem ejus, inæquales efficiet angulos ad conjunctam à tactu ad principium helicis; & eum quidem qui in antecedentia eſt, obtuſum, illum verò qui in conſequentia, acutum.

Prop. XVIII.

Si helicem (A Z B) *exprimâ revolutione deſcriptam tangat recta linea* (P Z) *ad helicis terminum* (Z); *à puncto autem* (A) *quod eſt in principio helicis, ducatur quædam* (A P) *revolutionis principio* (A Z) *perpendicularis, ducta* (A P) *tangenti occurret; & quæ eſt inter tangentem ac principium ſpiralis recta* (AP) *æqualis eſt circuli peripheriæ* ⌾. Fig. 89.

Quòd tangens occurrat perpendiculari A P, patet; * quia angulus A Z B eſt acutus. Porro * 16 *hujus.*

Sit recta A O major peripheria ⌾; & ducatur O Z; dico O Z ſecare helicem infra Z, vel ad antecedentia helicis. Nam fiat A E ad O Z perpendicularis; ducatur autem A H, ſecans O Z protractam in H, & circulum in G, [a] ita ut ſit intercepta G H ad chordam Z G, Z A ad ⌾ (id fieri poteſt, quia Z A. ⌾ ⊏ Z A. A O, [c] vel Z E. A E). Secet autem A H helicem in B. Et quia G H. arc Z G [b] ⊐ (G H. chord Z G [d] ::) Z A. ⌾. erit permutando G H. $\left|\begin{matrix} \text{Z A.} \\ \text{A G} \end{matrix}\right.$ ⊐ arc Z G. ⌾. ergo componendo A H. A G. ⊐ (⌾ + arc Z G. arc Z G [e] ::) AB. AG. [f] quare A B ⊏ A H. ergo punctum H eſt intra helicem, & proinde O Z ſecat helicem. [a] 6 *hujus.* [b] *hyp.* & 8. 5. [c] 4. 6. [d] *conſt.* [e] 15 *hujus.* [f] 10. 5.

Fig. 90.

Sit ſecundò AQ minor quàm ϖ, dico quoque ductam QZ helicem ſecare: nam ducatur tangens ZT, & AE ad ZQ perpendicularis; & quia AZ. ϖ [5] ⊐ AZ. AQ; [h]duci poſſit recta AL, ita ut HG inter ZQ, & circulum poſita ſe habeat ad ZL, partem tangentis abſciſſam, ut AZ ad ϖ; ſecet autem AL helicem in B. Et quia AZ. ϖ [k] :: HG. ZL [l] ⊐ HG. arc ZG. erit permutando AZ (AG). HG. ⊐ ϖ. arc. ZG [m] :: AG. BG. [n] ergo HG ⊏ BG. unde punctum H eſt intra helicem: & proinde QZ helicem ſecat. Quum igitur nulla QZ ad perpendicularem AP ducta peripheriæ inæqualem abſcindens tangat helicem, liquet illam quæ tanget, peripheriæ æqualem abſcindere. *Q.E.D.*

g *hyp.* & 8. 5.
h 7 *hujus.*
k *conſt.*
l 8. 5. & 2. c r 2. *I de ſph.*
m *cor.* 14 *huj.*
n 10. 5.

Fig. 91.

Dico porro, ſi AP = ϖ, ductam PZ helicem tangere. Sumatur enim in DZ quodvis punctum H, & per ipſum ducatur AH occurrens helici in B, circulo in G; & demittatur HK ad PA parallela; centro autem A per K ducatur circulus KRV, helicem ſecans in R; & per R ducatur radius AS. Eſtque PA. HK [o] :: AZ. KZ [*] :: AZ. RS [p] :: ϖ. arc ZS. ergo quum PA [q] = ϖ, [r]erit HK = arc. ZS. verùm HK ⊐ arc ZG. ergo arc ZS ⊐ arc ZG. [m]unde AR ⊏ AB. ergo quum AH ⊏ AR vel AK, liquet punctum H extra helicem cadere. quare tota DZ extra ipſam cadit.

o 4. 6.
* 7. 5.
p *cor.* 14. *huj.*
q *hyp.*
r 14. 5.

Figuræ hæ debitas pro ortogonies non ſervant, ne lineæ nimium appropinquantes ſe obſcurent.

In protractâ porro PZ ſumatur quodvis punctum *h*, & per ipſum ducatur A*k* ſecans helicem in *b*, circulum in *g*. Item ab *e* demittatur *ek* ad AZ perpendicularis, & centro A per *k* ducatur circulus *krv* helicem ſecans in *r*; ducatúrque recta A*r*, circulo primo occurrens in *s*. eſtque ut prius AP. *hk* [s] :: AZ. ZK [t] :: AZ. S*r* [u] :: ϖ. arc ZS. [x] unde *hk* = arc Z*s*. Atqui *hk* ⊏ arc Z*g*. ergo arc Z*s* ⊏ arc Z*g*. quare A*r* ⊏ A*b*. verùm A*h* ⊏ A*k* = A*r*. ergo magis A*h* ⊏ A*b*. ergo punctum *h* eſt extra helicem. unde planè concluditur totam PZ utcunque productam extra helicem poni, ipſamque proinde contingere.

s 4. 6.
t 7. 5.
u 15 *hujus.*
x 14. 5.
*

Ita *ſubtiliſſimum hoc Archimedis theorema*, cum ejus converſo, demonſtravimus oſtenſivè; quod maluimus facere, tum quia præſtantior eſt hic demonſtrandi modus, tum quo melius authoris ipſius methodus innoteſceret. Siquidem duæ primæ partes *Archimedis* principiis inſiſtunt; tertiam nos excogitavimus, quæ monſtrat quàm facilè, quámque perſpicuò theorematis hujus converſum demonſtrari poſſit, adeóque quomodo potuit inveniri.

Prop.

Prop. XIX.

At ſi ſpiralem (A Z Y) *ex ſecunda revolutione deſcriptam ad termi-* Fig. 92.
um contingat recta, & à principio ſpiralis ducatur quædam (A O) *ad*
ctos revolutionis principio (A Y), *occurret ipſa contingenti; eritque*
cta quæ eſt inter tangentem, & principium ſpiralis, dupla peripheriæ
cundi circuli (☉). * *per 17 huj.*

Sit enim O A ⊏ 2☉. [a]unde A Y, Z☉. ⊏ A Y. O A [b]:: Y E. A E
ductâ ſcilicet A E ad O Y perpendiculari) [c]ergo rurſus duci poſſit re- a 8. 5.
a A H ſecans O Y protractam in H, & circulum in G, ita ut ſit in- b 4. 6.
cepta G H ad chordam G Y, ut A Y ad 2☉. ſecet igitur A H ſpi- c 6 *hujus.*
alem in B. Et quia G H. arc Y G [a]⊐ G H. chord Z G [d]:: A Y.
☉; erit permutando G H. A Y ⊐ (arc Y G. 2☉ [e]::) G B. A Y.
rgo G H ⊐ G B. & proinde punctum H eſt intra helicem. Unde d *conſt.*
) Y non continget helicem. Similirer, ſi ponatur Q A ⊐ Q☉, imi- e *ſch. 15 huj.*
ando præcedentis ratiocinium, demonſtrabis ductam Q Y helicem f 10. 5.
non tangere: quapropter quæ tangit Y P duabus peripheriis æqua-
lem A P abſcindet. *Q. E. D.*

Sed & unico argumento, ſicut in præcedenti, demonſtrari poſſit
onverſum hujus, nempe ſi A P = 2☉, rectam P Y tangere helicem:
rem expende; mihi conſtitutum eſt à repetitionibus temperare.

Coroll.

Eodem modo demonſtrabitur, quòd ſi helicem in qualicunque revo-
tione deſcriptam recta quædam tangat in helicis termino, & à prin-
ipio helicis educta, revolutionis principio perpendicularis, occurrat
ngenti, multiplex hæc erit peripheriæ circuli, juxta revolutionum
umerum denominati, eodem numero.

Prop. XX.

Si helicem (A B Z) *in prima revolutione deſcriptam tangat recta* Fig. 93.
ta (B P) *non ad finem helicis; à contactu verò* (B) *ad principium*
icis conjungatur recta (B A) *& centro quidem* (A) *principio helicis,*
rvallo autem conjunctæ (A B) *deſcribatur circulus* (B E F); *à*
ncipio autem helicis ducatur quædam (A P) *à contactu ad initium*
icis connexæ (A B) *perpendicularis; occurret illâ contingenti; eritq;*
ta (A P) *occurſui, & helicis principio inte jecta, æqualis peripheriæ*

Fig 90.

Sit ſecundò AQ minor quàm ϖ. dico quoque ductam QZ helicem ſecare: nam ducatur tangens ZT, & AE ad ZQ perpendicularis; & quia AZ. ϖ [5] ⊐ AZ. AQ; [h]duci poſſit recta AL, ita ut HG inter ZQ, & circulum poſita ſe habeat ad ZL, partem tangentis abſciſſam, ut AZ ad ϖ; ſecet autem AL helicem in B. Et quia AZ. ϖ [k]. HG ZL [l] ⊐ HG. arc ZG. erit permutando AZ (AG). HG. ϖ. arc. ZG [m] :: AG. BG. [n] ergo HG ⊏ BG. unde punctum B eſt intra helicem: & proinde QL helicem ſecat. Quum igitur nulla QZ ad perpendicularem AP ducta peripheriæ inæqualem abſcindat, tangat helicem, liquet illam quæ tanget, peripheriæ æqualem abſcindere. *Q.E.D.*

g *hyp.* & 8. 5.
h 7 *hujus.*
k *conſt.*
l 8. 5. & 2. c 1. 2. *de ſph.*
m *cor.* 14 *huj.*
n 10. 5.

Fig. 91.

Dico porro, ſi AP = ϖ, ductam PZ helicem tangere. Sumatur enim in DZ quodvis punctum H, & per ipſum ducatur AH occurrens helici in B, circulo in G; & demittatur HK ad PA parallela; centro autem A per K ducatur circulus KRV, helicem ſecans in R; & per R ducatur radius AS. Eſtque PA. HK [o] :: AZ. KZ [*] :: AZ. R [p] :: ϖ. arc ZS. ergo quum PA [q] = ϖ, [r]erit HK = arc. ZS. verùm HK ⊐ arc ZG. ergo arc ZS ⊐ arc ZG. [m]unde AR ⊏ AB. ergo quum AH ⊏ AR vel AK, liquet punctum H extra helicem cadere. quare tota DZ extra ipſam cadit.

o 4. 6.
* 7. 5.
p *cor.* 14. *huj.*
q *hyp.*
r 14. 5.

Figuræ hæ debitas proportiones non ſervant, ne lineæ nimium approximantes ſeſe obſcurent.

In protractâ porro PZ ſumatur quodvis punctum *h*, & per ipſum ducatur A*k* ſecans helicem in *b*, circulum in *g*. Item ab *e* demittatur *ek* ad AZ perpendicularis, & centro A per *k* ducatur circulus *krv* helicem ſecans in *r*; ducatúrque recta A*r*, circulo primo occurrens in *s*. éſtque ut priùs AP. *hk* [s] :: AZ. ZK [t] :: AZ. S*r* [u] :: ϖ. arc ZS. [x] unde *hk* = arc Z*s*. Atqui *hk* ⊏ arc Z*g*. ergo arc Z*s* ⊏ arc Z*g*. quare A*r* ⊏ A*b*. verùm A*h* ⊏ A*k* = A*r*. ergo magis A*h* ⊏ A*b* ergo punctum *h* eſt extra helicem. unde planè concluditur totam PZ utcunque productam extra helicem poni, ipſámque proinde contingere.

i 14. 5.
t 7. 5.
u 15 *hujus.*
x 14. 5.
*

Ita *ſubtiliſſimum hoc Archimedis theorema*, cum ejus converſo, demonſtravimus oſtenſivè; quod maluimus facere, tum quia præſtantior eſt hic demonſtrandi modus, tum quo melius authoris ipſius methodus innoteſceret. Siquidem duæ primæ partes *Archimedis* principiis inſiſtunt; tertiam nos excogitavimus, quæ monſtrat quàm facilè, quámque perſpicuò theorematis hujus converſum demonſtrari poſſit, adeóque quomodo potuit inveniri.

Pr

Prop. XIX.

At ſi ſpiralem (A Z Y) *ex ſecunda revolutione deſcriptam ad terminum contingat recta, & à principio ſpiralis ducatur quædam* (A O) *ad rectos revolutionis principio* (A Y), *occurret ipſa contingenti; eritque recta quæ eſt inter tangentem, & principium ſpiralis, dupla peripheriæ ſecundi circuli* (☉). Fig. 92.

* *per* 17 *huj.*

Sit enim O A ⊏ 2☉. [a]unde A Y, Z☉. ⊏ A Y. O A [b]:: Y E. A E (ductâ ſcilicet A E ad O Y perpendiculari) [c]ergo rurſus duci poſſit recta A H ſecans O Y protractam in H, & circulum in G, ita ut ſit intercepta G H ad chordam G Y, ut A Y ad 2☉. ſecet igitur A H ſpiralem in B. Et quia G H. arc Y G [d]⊐ G H. chord Z G [d]:: A Y. 2☉; erit permutando G H. A Y ⊐ (arc Y G. 2☉ [e]::) G B. A Y. [f]ergo G H ⊐ G B. & proinde punctum H eſt intra helicem. Unde O Y non continget helicem. Similiter, ſi ponatur Q A ⊐ Q☉, imitando præcedentis ratiocinium, demonſtrabis ductam Q Y helicem non tangere: quapropter quæ tangit Y P duabus peripheriis æqualem A P abſcindet. *Q. E. D.*

a 8. 5.
b 4. 6.
c 6 *huj.*
d *conſt.*
e *ſch.* 15 *huj.*
f 10. 5.

Sed & unico argumento, ſicut in præcedenti, demonſtrari poſſit converſum hujus, nempe ſi A P = 2☉, rectam P Y tangere helicem: tu rem expende; mihi conſtitutum eſt à repetitionibus temperare.

Coroll.

Eodem modo demonſtrabitur, quòd ſi helicem in qualicunque revolutione deſcriptam recta quædam tangat in helicis termino, & à principio helicis educta, revolutionis principio perpendicularis, occurrat tangenti, multiplex hæc erit peripheriæ circuli, juxta revolutionum numerum denominati, eodem numero.

Prop. XX.

Si helicem (A B Z) *in prima revolutione deſcriptam tangat recta linea* (B P) *non ad finem helicis; à contactu verò* (B) *ad principium helicis conjungatur recta* (B A) *& centro quidem* (A) *principio helicis, intervallo autem conjunctæ* (A B) *deſcribatur circulus* (B E F); *à principio autem helicis ducatur quædam* (A P) *à contactu ad initium helicis connexæ* (A B) *perpendicularis; occurret illâ contingenti; eritq; recta* (A P) *occurſui, & helicis principio interjecta, æqualis peripheriæ* Fig. 93.

(E F B) *quæ est inter contactum, & sectionem, ubi descriptus circulus secat principium revolutionis; in antecedentia acceptâ peripheriâ à puncto* (E) *quod est in principio revolutionis.*

1 Coroll. 14. & not. 15. Nihil facilius est, quàm præcedentes discursus huc applicare: nota tantùm, si ducatur quæpiam A C secans helicem in C, circulum in G, fore AG GC :: arc EFB. arc BG. Cætera sponte fluent:
A B
quid plura? —— ἐχθρὸν δέ μοι ἔσται
Αὖθις ἀριζήλως εἰρημένα κυθολογεύειν.

Coroll.

Quinetiam eodem pacto demonstrabitur, si in secunda circumvolutione descriptam helicem contingat recta, non ad finem helicis, alia verò eadem construantur, quòd rectæ contingenti occurrentis pars, intercepta à principio helicis, æqualis est toti descripti circuli peripheriæ, & præterea illi, quæ est inter dicta puncta, similiter sumptâ peripheriâ. Et porro si ex quacunque revolutione progenitam *helicem* contingat aliqua recta, non ad terminum helicis; alia verò eadem disponantur, quòd recta dictis punctis interjecta, sit multiplex quædam peripheriæ descripti circuli secundum numerum proximè minorem eo, secundùm quem revolutiones dicuntur., & insuper æqualis arcui inter dicta puncta similiter sumpto.

Prop. XXI.

Fig. 94. *Sumendo spatium comprehensum sub helice* (A B C D E F G L Z) *in prima revolutione descripta, & prima in principio revolutionis recta* (A Z); *possibile est ipsi figuram planam circumscribere, aliámque inscribere, è similibus compositam sectoribus, ita ut circumscripta inscriptâ major sit quocunque proposito spatio* (X).

a 9 1. Radii quotlibet primi circuli circumferentiam [a] æqualiter partiant (ordiendo ab Z) occurrentes helici punctis A, B, C, D, E, F, G, L, Z. tum centro A per hæc puncta ducantur arcus *b* B ϛ, *c* C κ, *d* D δ, *e* E ε, *f* F φ, *g* G γ, *l* L λ, *z* Z: itaque vides circumscriptam helici figuram A *b* B *c* C *d* D *e* E *f* F *g* G *l* L *z* Z conflatam è sectoribus similibus *b* A *b*, *c* A C, *d* A D, &c. Vides etiam alteram A B ϛ C κ D δ E ε F φ G γ L λ inscriptam, constantémque sectoribus B A ϛ, C A κ, D A δ &c. qui totidem sunt, & æquales sectoribus figuræ circumscriptæ, excepto maximo *z* A Z. ([b] nam sector ϛ A B = *b* A B; &

b 33. 6.

κ A C

$\varkappa$ A C = c A C, &c). Itaque si circulus [a]bisectione (vel aliâ æquali sectione) continuò divisus fuerit, ita ut sector z A Z tandem evadat minor dato spatio X [c] (id quod fieri potest), liquet hoc modo fieri posse quod proponitur. c 1. 10.

Coroll.

Hinc patet, quòd possibile sit circa dictum spatium figuram, qualis dicta est, describere, ita ut circumscripta figura spatium superet excessu minori quocunque proposito spatio: & rursus, aliam inscribere, ita ut similiter spatium superet figuram minori quocunque proposito spatio.

Sch Nota radios A B, A C, A D, A E, &c. sese æqualiter excedere; & excessus æquari minimo A B. 12 *hujus.*

Prop. XXII.

Sumendo spatium comprehensum sub helice (Z M N O P R Y) *per secundam revolutionem descriptâ, & recta* (Z Y) *quæ est secunda in principio revolutionis, potest ipsi figura plana circumscribi, similibus è sectoribus composita, necnon alia inscribi, sic ut circumscripta inscriptam excedat minori quàm proposito quovis spatio* (X). Fig. 95.

Radii quotlibet secundum circulum [a]æqualiter dispertiant, occurrentes helici punctis Z, M, N, O, P, R, Y; per quæ, centro A, describantur arcus $Z\zeta$, m M μ, n N ν, o O ω, p P ϖ, r R, y Y; unde helici circumscriptam habemus figuram A m M n N o O p P r R y Y constantem similibus sectoribus m A M, n A N, o A O, &c. & inscriptam aliam A $Z\zeta$ M μ N ν O ω P ϖ R ρ constantem totidem sectoribus Z A ζ, M A μ, N A ν, &c. Et cùm sit sector m A M [b] = M A μ; & n A N [b] = N A ν, & ita continuò, liquet excessum figurarum esse penes sectores Z A ζ primum inscriptæ, & y A Y, ultimum circumscriptæ (nam reliqui hujus reliquis illius æquantur). atqui continuâ bisectione [c]fieri potest, ut sit rector y A Y $\sqsupset$ X; túmque fortiùs erit sect. y A Y — Z A ζ $\sqsupset$ X. quare constat propositum. a 9. 1. b 33. 6. c 1. 10.

Schol. Rursus nota radios A Z, A M, A N, &c. æquali excessu procedere, & maximum A Y duplum esse minimi A Z. 12 *hujus.*

Coroll.

Coroll. I.

Itaque liquet excessum circumscriptæ figuræ supra sumptum spatium (sub helice comprehensum) minorem esse posse quovis proposito spatio. Itidémque dicti spatii supra inscriptam figuram excessum minorem esse posse quolibet proposito spatio.

II.

Simili modo liquet, quòd possibile est circa spatium sub helice in quacunque revolutione descripta, & recta in principio revolutionis, ab eodem numero denominata comprehensum describere figuram, qualem diximus, planam, ita ut circumscripta figura superet sumptum spatium minori omni proposito spatio; & rursus inscribere, ita ut sumptum spatium majus sit, quam in scripta figura, minori quovis proposito spatio.

Prop. XXIII.

Fig. 96. *Sumpto spatio* (C A G) *comprehenso sub helice, quæ minor est descriptâ in prima revolutione, non habenti pro termino principium helicis, & sub rectis* (A C, A G) *ductis à principio helicis; possibile est spatio figuram circumscribere, similibus è sectoribus compositam, & aliam inscribere ita ut circumscripta figura superet inscriptam minori quàm quocunque proposito spatio* (X).

Rectæ A D, A E, A F æqualiter secent angulum C A G, vel arcum K G, ita ut sector *g* A G ⊐ X; & centro A per C, D, E, F ducantur arcus C *κ*, *d* D *δ*, *e* E *ε*, *f* F *φ*, & (sicut in præcedentibus) planissimè liquet propositum.

Coroll.

Hinc manifestum est, quòd circa dictum spatium figuram planam describere licet, qualem diximus, ut circumscripta figura major sit spatio, minori quam proposito quovis spatio.

Prop. XXIV.

Fig. 97. *Spatium sub helice* (A B C D Z) *in prima revolutione descripta, &*
ppus 21. IV. *prima recta* (A Z) *quæ est in principio revolutionis, tertia pars est primi circuli. Spatium dicatur* (S), *& primus circulus* ⊙ *α*.

Dico

21 *huj.*

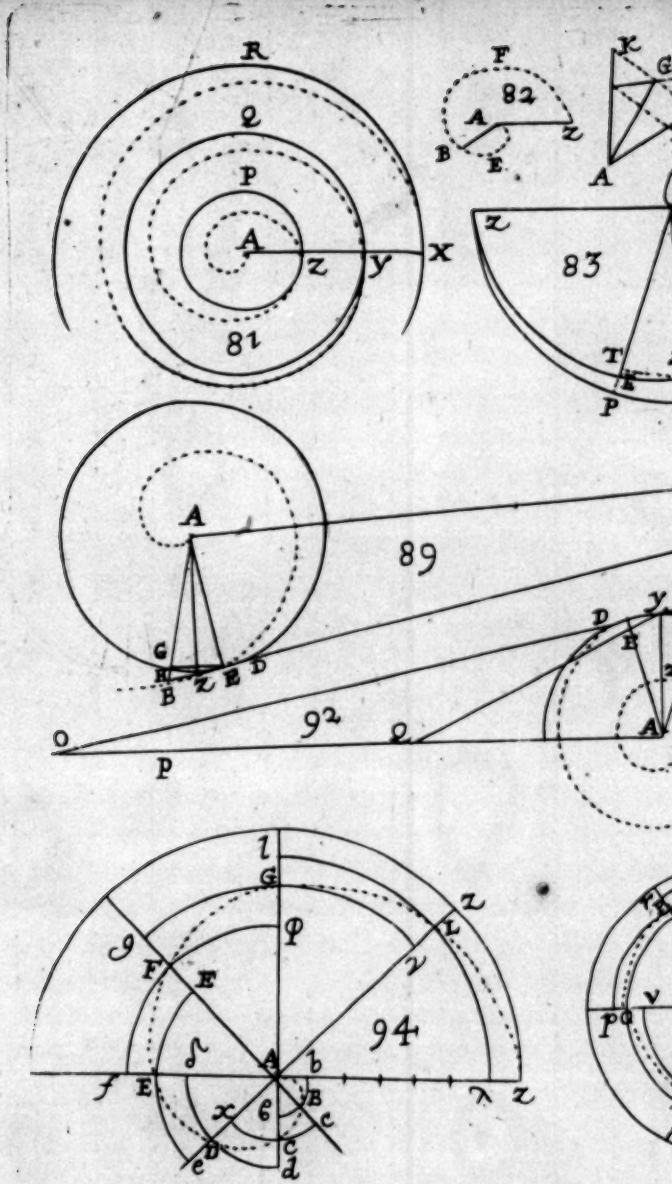
ix. 1.
l. 21 *b.*

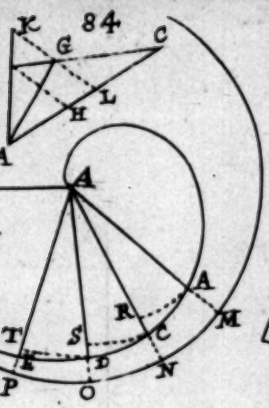
v. 10 *b.*
5 ax. 1.

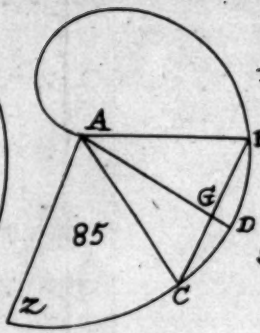
iam bellè
ii Pap-
21. *IV.*

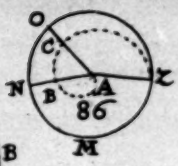
97.

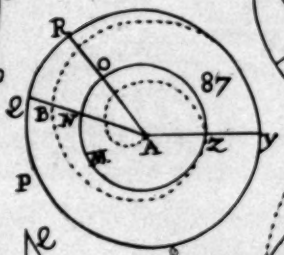
98.

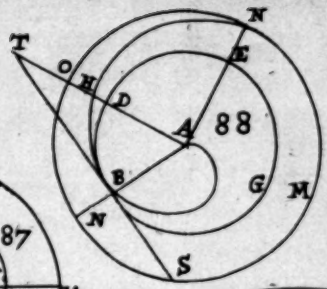

81
82
83
89
92
94

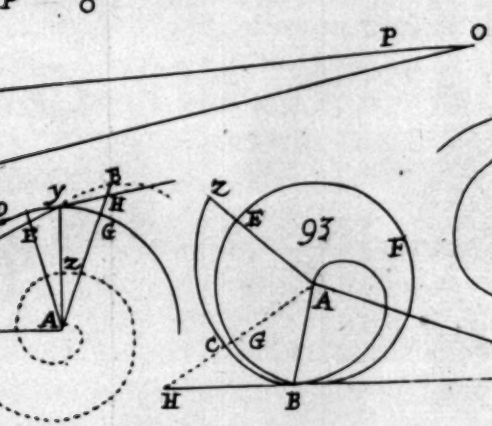

84

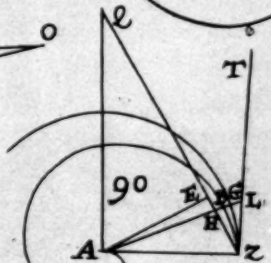

85

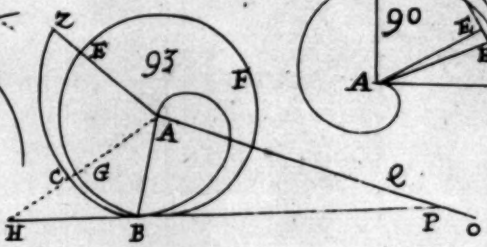

86

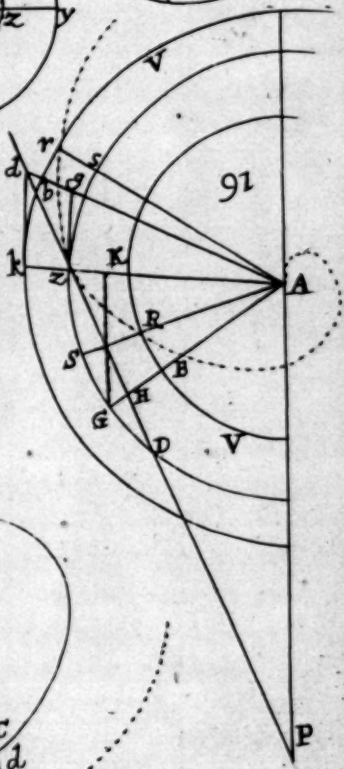

87

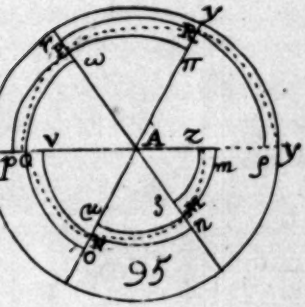

88




90


93


91


95

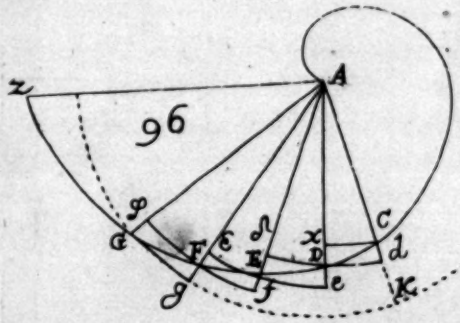

96

Fig. 9(

Fig. 5
ippus 3

Dico primò, non eſt $\frac{1}{3} \odot \alpha \sqsubset$ S. Nam ſi affirmas helici [a]circumſcribatur figura A *b* B *c* C *d* D Z, juxta præſcriptum 21 æ hujus, quæ dicatur φ, ita ut ſit φ — S $\sqsupset \frac{1}{3} \odot \alpha$ — S: [b]vel $\varphi \sqsupset \frac{1}{3} \odot \alpha$. Cùm verò radii A B, A C, A D &c. [c]ſeſe æqualiter excedant, & exceſſus æquetur minimo A B, & ſectores (ad ipſos) ſimiles ſint, [d] erunt tot ſectores æquales maximo æ A Z, quot ſunt omnes inæquales, minores triplo inæqualium, hoc eſt circulus α minor triplo figuræ φ; vel $\frac{1}{3} \odot \alpha \sqsupset \varphi$. at priùs affirmâſti eſſe $\frac{1}{3} \alpha \sqsubset \varphi$. ergo tibi contradicis.

[a] *cor.* 21 *huj.*
[b] 4 *ax.* 1.
[c] *ſchol.* 21 *b.*
[d] 3 *cor.* 10 *b.*
[e] 4 & 5 *ax.* 1.

Dico ſecundò, non eſſe $\frac{1}{3} \odot \alpha \sqsupset$ S; ſi hoc affirmas, helici [a]inſcribatur figura A B C D Z, quæ vocetur $\downarrow$, etiam juxta 21 hujus, ita ut S — $\downarrow \sqsupset$ S — $\frac{1}{3} \odot \alpha$; [c]vel $\frac{1}{3} \alpha \sqsupset \downarrow$. atqui ſectores omnes æquales ſectori æ A Z [d] majores ſunt triplo totidem inæqualium ſine æ A Z, hoc eſt $\odot \alpha \sqsubset 3 \downarrow$, vel $\frac{1 \odot \alpha}{3} \sqsubset \downarrow$. at priùs erat $\frac{1}{3} \alpha \sqsupset \downarrow$, quæ repugnant.

Hoc etiam bellè declarat Pappus in 21. *IV.*

Reſtat igitur, ut ſit $\frac{1}{3} \odot \alpha =$ S. *Q. E. D.*

Schol.

Hoc directè perſpicitur è ſcholio ad 10 hujus. Cùm enim ſectores figuræ circumſcriptæ vel inſcriptæ procedant ut 0, 1, 4, 9, 16 &c. (in duplicata ſcilicet radiorum proportione) & quò deſinant in ſpatium helicis, eorum numerus ſit infinitus, ideo totidem eorum maximo æquales, hoc eſt totus circulus, eorum omnium triplus eſt, hoc eſt ipſius ſpatii, ab helice comprehenſi, triplus.

Eleganter hoc etiam colligitur methodo indiviſibilium. Dividatur enim radius A Z in partes quotlibet æquales punctis *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*; & centro A per iſta puncta deſcribantur arcus *b* B, *c* C, *d* D, &c. occurrentes helici punctis B, C, D, E, F, G, H. Eſtque arcus *c* C quadruplus arcûs *b* B (ob radium *c* A duplum radii *b* A, & angulum *c* A C duplum anguli *b* A B), & arcus *d* D noncuplus arcûs *b* B; & ſic perpetuò juxta ſeriem 0, 1, 4, 9, 16 &c. uſque ad maximum æ æ. quare ſi numerus horum arcuum infinitus ſit (vel ſi per omnia radii A Z puncta tranſeant) erit eorum ſumma ſubtripla totidem æqualium maximo; hoc eſt radii ducti in circumferentiam circuli Z Z, hoc eſt dupli circuli Z Z. ergo ſpatium ex iis conſtans eſt $\frac{1}{3}$ circuli Z Z, & reliquum intra helicem eſt $\frac{1}{3}$ ejuſdem. Exhinc patet magna ſpiralem inter & parabolen affinitas; nam ſi A X ſit axis *parabolæ* A B C D E F G H Z, cujus vertex A, tangens A Z, & per puncta diviſionum *b*, *c*, *d*, &c. ducantur ad axem parallelæ A B, *c* C, *d* D &c. Erit *c* C = 4 *b* B

Fig. 97.

Fig. 98.

bB, & dD = 9 bB &c. dD = 16 bB; eâdemque ſic perpetuò ratione ſicut in ſpirali; adeò quidem ut ſi recta b B hîc æquetur arcui bB iſtic; ſint omnes rectæ cC, dD &c. arcubus reſpectivis cC, dD &c æquales. unde ſpiralis nihil eſt aliud quàm parabole, cujus parallelæ axi rectæ in circulares arcus, circa verticem A veluti centrum, contorquentur. Unde non adeò mirum eſt innumeras ſpiralis affectiones cum paſſionibus parabolæ conſpirare. Mihi ſufficiet hoc obiter ſubnotâſſe; qui plura volet, adeat *Gregorium Vincentium*, *Cavallerium*, *Torricellium*, alioſque.

Coroll.

Fig. 99. Simili planè diſcurſu, ſi à centro A ducatur in primæ revolutionis helicem recta quævis A G; & centro A per G deſcribatur circulus E F G, occurrens revolutionis principio A Z in E; erit ſpatium concluſum helice A B G, & rectâ A G ſubtriplum ſectoris A E F G A.

Prop. XXV.

fig 95. *Spatium* (Σ) *ſub ſpirali* (Z M N O P R Y) *& recta* (Z Y) *ſecunda in principi revolutionis ad ſecundum circulum* (ς) *hanc habet rationem, quam habet* 7 *ad* 12; * *quæ eadem eſt, quam habent utraque ſimul, quodque comprehenditur ſub radio ſecundi circuli* (A Y), *& radio primi circuli* (A Z), *& tertia pars quadrati, quod ab exceſſu* (Z Y) *quo radius ſecundi circuli excedit radium primi circuli, ad quadratum à radio ſecundi circuli.*

* *ſchol.* 11 *h.*

Si fieri poteſt, ſit primò ⊙ rad √: A Y * A Z + ⅓ Z Yq ⊏ Σ.

a *cor.* 22 *huj.* [a]Circumſcribatur igitur ſpatio figura (quam voca φ) conſtans ſectoribus, qualis in 22 hujus, ita ut φ — Σ ⊐ ⊙ rad √: A Y * A Z + ⅓ Z Yq — Σ. [b]vel φ ⊐ ⊙ rad √ A Y * A Z + ⅓ Z Yq. Cùm verò rectæ A Z, A M, A N, A O &c. [c]ſeſe æqualiter excedant, & ſuper iis (exceptâ minimâ A Z) conſtituti ſimiles ſectores componant figuram φ, & totidem æquales maximo γ A Y conficiant circulum ς; [d]erit ⊙ ς. φ ⊐ A Yq. A Y * A Z + ⅓ Z Yq [e] :: ⊙ ς. ⊙ rad √: A Y * A Z + ⅓ Z Yq. [f] quare φ ⊏ ⊙ rad √: A Y * A Z + ⅓ Z Yq. Erat verò φ ⊐ ⊙ rad √ A Y * A Z + ⅓ Z Yq, quæ repugnant.

b 4. *ax.* 1.
c *ſch.* 22 *huj.*
d *cor.* 11 *huj.*
e *cor.* 2. 12.
f 10. 5.

Sin dicatur ⊙ rad √: A Y * A Z + ⅓ Z Yq ⊐ Σ. Inſcribatur figura ↓, [a]ita ut ſit Σ — ↓ ⊐ Σ — ⊙ √: A Y * A Z + ⅓ Z Yq. [c] quare ⊙ rad √: A Y * A Z + ⅓ Z Yq ⊐ ↓. atqui hîc ſectores ſimiles ad A Z, A M, A N &c. ſine maximo γ A Y conſtituunt figuram ↓, & totidem maximo pares circulum ς. ergo ⊙ ς. ↓ ⊏ ⊙ ς. ⊙ rad √: A Y * A Z

a *cor.* 22 *huj.*
c *ſch.* 22 *huj.*
e 4. *ax.* 1.

$* AZ + \frac{1}{3} ZYq$. & proinde $\sqrt{\ } \odot$ rad $\sqrt{}: AY * AZ + \frac{1}{3} ZYq$. quod itidem prædictis repugnat.

Quin igitur potiùs eſt $\odot$ rad $\sqrt{}: AY * AZ + \frac{1}{3} ZYq = \Sigma$. unde $\Sigma. \odot \mathcal{C} :: {}^{c}AY * AZ + \frac{1}{3} ZYq. ZYq * :: 7.12$. *Q.E.D.* **ſch. 11 huj.*

Coroll.

Eodem autem modo demonſtrabitur, quòd comprehenſum ſpatium ſub helice per quamcunque revolutionem deſcripta, & rectâ eodem numero, quo revolutio, denominatâ, ad circulum itidem eodem numero denotatum, quo revolutiones; rationem habet, quam utraq; ſimul, quódque ſub radio circuli ejuſdem numeri, & radio circuli numero, qui unitate minor ſit numero revolutionum, denominat; & tertia pars quadrati quod ab exceſſu, quo excedit radius majoris circuli dictorum radium minoris è dictis circuli ad quadratum radii majoris circuli dictorum. Nempe ſpatium $\alpha\mathcal{C}\gamma$ ſe habebit ad circulum tertium, ut $AX * AY + \frac{1}{3} YXq$ ad AXq; & ſpatium $\alpha\mathcal{C}\gamma\delta$ ſe habebit ad circulum quartum, ut $AV * AX + \frac{1}{3} XVq$ ad AVq.

Coroll.

Hinc ipſa ſpatia inter ſe erunt ut $\frac{AZq}{3}, AY * AZ + \frac{ZYq}{3}, AX * AY + \frac{YXq}{3}, AV * AX + \frac{XVq}{3}$ &c. Nam ſp. $\alpha = \frac{AZq}{3} \times \frac{\odot \alpha}{AZq}$. & ſp. $\mathcal{C} = AY * AZ. + \frac{ZYq}{3} * \frac{\odot \mathcal{C}}{AYq}$. & ſp. $\gamma = AX * AY + \frac{YXq}{3} \times \frac{\odot \gamma}{AXq}$.

at $\frac{\odot \alpha}{AZq} = \frac{\odot \beta}{AYq} = \frac{\odot \gamma}{AXq}$ &c.

Hinc confici poſſit Tabella rationes exprimens quas habent ſpatia *helicibus*, & *rectis* comprehenſa ad circulos ejuſdem ordinis, & ad ſe invicem, quæ talis eſt. (quod ſi horum ſpatiorum primum ſubtrahatur è ſecundo, ſecundum è tertio, & ita deinceps, reliqua ſe habebunt juxta columnam ultimam; quæ nempe ſpatia reſpicit propoſitio 27ª ſubſequens).

	Circuli.	Spatia.	Residua.
1.	3	1	1 a.
2.	12	7	6 ζ.
3.	27	19	12. γ
4.	48	37	18. δ
5.	85	61	24
6.	108	91	30
7.	147	127	36
8.	192	169	42
9.	243	217	48
10.	300	271	54

Prop. XXVI.

Fig. 96. *Comprehensum spatium* (C A G) *sub helice* (C G) *quæ minor est descriptâ in una revolutione, non habens terminum principium helicis* (A), *& rectis* (A C, A G) *à terminis ejus ad principium helicis ductis, ad sectorem* (K A G) *radium quidem habentem æqualem majori* (A G) *ductarum à termino ad principium helicis, arcum verò* (G K) *ductis rectis interceptum, ad easdem partes cum helice; hanc habent rationem quam habent utraque simul, quadque continetur sub rectis* (A G, A C) *à terminis ad principium spiralis ductis, & tertia pars quadrati ab excessu quo major dictarum superet minorem ad quadratum majoris* (A G) *à terminis ad principium helicis conjunctarum.*

Sector ipsi K A G similis & cujus radius sit $\sqrt{:}$ A G * A C + $\frac{1}{3}$ C Kq vocetur ξ: &, si fieri potest, sit ξ major spatio C A G. [a] Circumscribatur figura qualis in 23 hujus, (quæ nominetur φ) ita ut sit φ—sp. C A G ⊐ ξ—sp C A G. [b] vel φ ⊐ ξ. Cùm verò sint rectæ A C, A D, A E &c. æquali progredientes excessu, à quibus præterquam à minima A C, descripti similes sectores componunt figuram φ, totidemque æquales maximo faciunt sectorem K A G, [c] erit sect K A G. φ ⊐ A Gq. $\frac{\text{A G * A C + } \frac{1}{3} \text{ C Kq}}{\text{A K.}}$ :: sect K A G. ξ. unde φ ⊏ ξ. contra constructionem.

a 20. 23 h.

b 4. ax. 1.

c cor. 11 huj.

Sin

Sin dicatur spatium C A G majus dicto sectore ξ, [a] inscribatur figura quædam ↓, ita ut sp C A G — ↓ ⊐ sp. C A G — ξ; adeoque ξ ⊐ ↓. atqui jam sect K AG. ↓ ⊏ sect K A G. ξ. unde contra constructionem, ↓ ⊐ ξ. Ut hæc igitur vitentur absurda, erit ξ = sp C A G; & idcirco sp C A G. sect K A G :: sect ξ sect K A G :: A G × A C + ⅓ C Kq. A Gq. *Q. E. D.*

Coroll.

Spatium K C G. C A G :: A C × C K + ⅔ C Kq. A G × A C + ⅓ C Kq.

Nam A Kq [a] = A Cq + 2 A C × C K + C Kq. Pro A Cq + A C × C K [b] substituatur æquale A C × A K; estque A Kq = A C × A K + A C × C K + C Kq ergò sect K A G. sp C A G [c] :: A C × A K + A C × C K + C Kq. A G × A C + ⅓ C Kq. & dividendo A G

sp K C G. sp C A G :: A C × C K — ⅔ C Kq. A G × A C + ⅓ C Kq,

[a] 24. 2.
[b] 3. 2.
[c] 27 *hujus* &

Prop. XXVII.

Spatiorum comprehensorum sub helicibus & rectis, quæ in revolutione, tertium quidem (γ) secundi (ε) duplum est, quartum verò (δ) triplum, quintum autem quadruplum; & perpetuò subsequens secundum numeros qui deinceps, multiplex est secundi spatii; primum verò spatium (α) sextæ pars est secundi (ζ).

Vid. not ad 5 def. hujus. fig. ad coroll. 25.

Clarissimè patet horum veritas è tertia columna tabellæ suprapositæ, è 25ª deducta. quid plura?

Prop. XXXVIII.

Si in helice (A C G Z) ex una quacunque revolutione descripta sumantur duo puncta (C, G) quæ non sunt ipsius termini, à sumptis verò punctis connectantur rectæ (A C, A G) ad helicis principium (A); & centro quidem principio helicis, intervallis verò (A C, A G) ductis à punctis ad principium helicis describantur circuli (C L N, K G M) spatium (K G C) comprehensum sub majori arcu (K G) intercepto rectis (A C, A G) & helice rectis iisdem interjectâ, & rectâ (C K) productâ, hanc habebit rationem ad spatium (L C G) comprehensum sub minori arcu (L C), & eadem helice & rectâ (G L) connectente terminos ipsorum, quem radius (A C) minoris circuli cum duabus tertiis excessûs (C K) quo radius majoris circuli excedit minoris circuli radium

Fig. 101.

ad radium minoris circuli cum una tertia parte ejuſdem exceſſus (CK).

a *cor.* 27 *h.* b 26 *hujus.* c *ſch.* 2, 12 d *ſch.* 19. 5. * 3, 2. & 3 *ax.* 1. f 1. 6.

Nam ſp. K G C. ſp. C A G [a]:: A C * C K + ⅓ CKq. A K * AC + ⅓ CKq. & ſp C A G. ſect K A G[b]:: A G * A C + ⅓ C Kq. AGq; ac ſect. K A G. ſect. C A L [c]:: A Gq. A Cq. ergo ex æquo ſp KGC. ſect C A L :: A C * C K + ⅓ C Kq. A Cq. [d] ergo ſp K G C. ſp C A G — ſect. C A L :: A C * C K — ⅓ C Kq. $\frac{AK * AC + \frac{1}{3} CKq}{A}$ — A Cq: hoc eſt ſp K G C. ſp L C G :: A C * C K + ⅓ C Kq. [*]AC * C K + ⅓ C Kq [f]:: A C + ⅓ C Kq. A C + ⅓ C Kq. *Q.E.D.*

Theorema.

Pappus 22. *IV.* Fig.. 102. a *cor.* 24 *hujus.* & 15. 5. b 20. *def.* 5. c *ſch.* 2. 12.

Si ab helicis A B Z *principio ducantur utcumque rectæ* A D, A C, *erunt ſpatia* A B D A, A B C A *inter ſe, ut cubi à rectis* A D, A C.

Centro A per D, C ducantur circuli F N D, E M C ſecantes A Z in E, F; eſtque ſpatium A B D A. A B C A [a]:: ſect. A F N D A. A E M C A [b] = A F N D A. A E M K A + A E M K A. A E M C A = [c] A Dq. A Kq + [c] A D. A K = A D cub. | A K cub. | A C cub.

Pappus 35. *IV.*

Per helicem cùm alia difficilia Geometriæ Problemata, tum hoc præcipuum conficitur.

Problema.

Fig 103.

Datum (*angulum, vel*) *arcum* Z M G *ſecare in datam rationem.*

Ducantur à centro A rectæ A Z, A C, & A G ſecet helicem ABZ in C; & ratio A E ad A C æquetur datæ, & centro A per E ducatur arcus circuli E B ſecans helicem in B; & ab A per B ducatur recta A B F; & liquet eſſe arc Z M F. arc F G [a] :: (A B. E C [b] ::) A E. E C, [c] hoc eſt in data proportione.

a *cor.* 14. *huj.* b 7. 5. c *conſtr.*

De Conoidibus & Sphæroidibus.

Archimedes Doſitheo, S.

MIttò ad te conſcriptas à me hoc in libello cùm reliquorum Theorematum Demonſtrationes, quas inter priùs miſſas non habebas, tum aliorum poſtea repertorum, quæ quidem ſæpe jam antea aggreſſus contemplari, cùm difficultatis aliquid habere videretur ipſorum inventio, ferè deſperavi; quamobrem neque cum aliis edita ſunt, quæ proponebantur: poſtea verò diligentiùs iis incumbens, inveni de quibus hæſitaveram. Erant autem è prioribus Theorematis reliqua circa *Conoides rectangulum* propoſita, hæc verò jam tandem inventa verſantur circa *Conoides hyperbolicum*, & *figuras Sphæroides*, quarum aliquas quidem oblongas, alias verò oblatas voco.

Definitiones, & Hypotheſes.

DE *Conoide utique rectangulo ſupponebantur hæc.*

(Nota: è planis conum diverſimodè ſecantibus ortas in coni ſuperficie lineas, quas *Apollonium Pergæum* ſequuti *Parabolam*, *Hyperbolam*, & *Ellipſim* jam appellitant, veteſtiores Geometræ nominârant ſectiones *coni rectanguli*, *obtuſanguli*, *acutanguli*; quia ſcilicet, opinor, ſectiones haſce tantùm in cono recto, ſecto a plano ad crus trianguli per axem recto conſiderârunt; quomodo ſemper in cono rectangulo procreabitur *parabola*, in obtuſangulo *hyperbola*, in acutangulo *Ellipſis*, ut nempe ſi B V A ſit triangulum per axem coni, ſitq; D E communis ſectio plani ſecantis cum triangulo B V A, & V D plano Fig. 104. 105. 106.

plano secanti recta sit, ac ideo angulus V D E rectus; constat si angulus V rectus sit, esse D E ad V A parallelam, adeóque sectionem esse *parabolam*; sin angulus V sit obtusus, liquet E D cum A V producta convenire supra verticem coni, adeóque sectionem esse *hyperbolam*; quòd si angulus V fuerit acutus, patet D E occursuram ipsi V A intra verticem, ac idcirco sectionem fore *ellipsim*. Talis mihi videtur primitùs impositorum istorum nominum, * quæ passim usurpat *Archimedes* ratio: nos verò tam brevitati quàm perspicuitati consulentes ubique pro desuetis istis & jam minus appositis vocabulis usitatiora substituemus & commodiora nomina *parabolæ*, *hyperbolæ*, *ellipsis*, quod certè monitum oportere videbatur.)

* *Quamvis haud penitus ignotas Archimedi fuisse sectiones hasce etiam in cono scaleno satis patet ex 8 & 9 hujus libri, ubi & ellipsis nomen expressum habetur.*

I. Si *parabola* manente diametro circumducta restituatur denuò unde processerat; â parabola interceptam figuram appellari *conoides parabolicum*; & *axem* quidem illius vocari *manentem diametrum*: *Verticem* verò punctum, quo axis occurrit superficiei conoidis.

Exempli gratiâ, *conoidis* B V A producti è revolutione semi-parabolæ B V K circa diametrum V K, axis est V K, vertex V.

Fig. 107. II. Si *conoides parabolicum* contingat planum, tangenti autem plano ductum parallelum aliud planum conoidis aliquam portionem abscindat; interceptam à sectione conoidis in abscindente plano planum appellari *basin abscissæ portionis*: *verticem* verò punctum, ad quod alterum planum *conoides* tangit: *Axem* verò ex ducta per verticem ad conoidis axem parallela interceptam in portione rectam.

Parabolicum conoides B V A tangat planum [illegible] in D; & huic parallelum planum G S secet; sitque recta D E *conoidis axi* V K parallela; fit portio S D G, cujus *basis* S H G, *vertex* D, *axis* D E.

* *Contemplanda verò proponebantur hæc; quòd &c. subjicit prop.*

III. *De *conoide verò hyperbolico* præstruebamus hæc: si in plano sit *hyperbola*, ejúsque diameter, & sectionis **asymptoti*, diametro autem manente circumductum planum in quo sunt dictæ lineæ restituatur unde processerat; de *hyperbolæ asymptotis* perspicuum est, quòd conum *Isoscelem* intercipient, cujus vertex erit punctum, in quo *asymptoti* conveniunt, *axis* verò *diameter manens*: ab *hyperbola* verò interceptam figuram vocari *conoides hyperbolicum*; *Axem* verò diametrum qui manet; *Verticem* autem punctum, in quo axis occurrit superficiei conoidis: Conum verò ab *hyperbola asymptotis* interceptum, conoidis continentem dici: rectam verò conoidis, & coni ipsum continentis verticibus interjectum axi accedentem nominari.

* *τὰς ἔγγιστα vocat author, nos usitatum jam nomen subrogamus.*

Fig. 108.

Si e g. *hyperbola* B V A cum *asymptotis suis* C M, C N circa diametrum C V K revolvatur, fiet *conoides hyperbolicum* B V A, ipsumq; com-

complectens *conum* M C N, cujus *vertex* C, *axis* C K; ipſius autem *conoidis axis* eſt V K, *vertex* V, axi accedens V C.

IV. Et ſi *conoides hyperbolicum* tangat planum, tangenti autem plano parallelum aliud planum portionem abſcindat conoidis; planum quidem à ſectione conoidis in abſcindenti plano interceptum appellari *baſin* portionis abſciſſæ; *verticem* verò punctum quo planum tangens contingit conoides: Axem verò ex ducta per verticem portionis, & verticem coni conoides continentis interceptam in portione rectam, & dictis verticibus interjectam axi accedentem nuncupari. Fig. 104.

E. G. Conoides hyperbolicum B V A tangat planum T D in D, & huic parallelum S G ſecet, & per hyperbolæ centrum C ducatur recta C D E; erit facta portio S D G, cujus baſis S H G, vertex D, axis D E, axi accedens D C.

V. *Parabolica* utriq; *conoideâ* omnia* ſimilia ſunt. *Hyperbolicorum* verò *conoideon* iſta vocentur ſimilia, quorum continentes coni ſunt ſimiles.

* *Utique ſimilitudinem lato ſenſu capit, a-bis omnia parabolica conoidea non magis ſibi ſimiles ſunt quàm omnes coni.*

Hinc colligitur *hyperbolarum ſimilium* definitio ex *Archimedis* ſententia; nempe, Hyperbolæ ſimiles ſunt, quarum figuræ ſimiles, vel quarum latera ſunt proportionalia * Fig. 110. 111.

* *vel, quarum diametri conjugata ſunt proportionales.*

Sed intellige figuras ad axes ſolos, non ad alias diametros (ſaltem ad ſimiles diametros, hoc eſt eas quæ æquales cum ordinatim applicatis angulos faciunt) conſtitui.

Sint enim hyperbolæ B V A, *b v a*; quarum aſymptoti C M, C N, & *cm*, *cn*; axes C K, *ck*, quibus perpendiculares M N, *mn*; & his parallelæ R S, *r s* per vertices V, *v* ductæ, adeóque tangentes. Sit verò C K, M N :: *ck*, *mn*. ergo coni conoidea hyperbolica, ex hyperbolarum B V A, *b v a* circa axes C K, *ck* revolutione progenita, continentes ſunt ſimiles. Sint autem hyperbolæ B V A latera T. R. & hperbolæ *b v a* latera *t*, *r*. & quia T. R :: C Vq. V Rq :: C Kq. K Mq :: Q. *ck* Q. *km* :: Q. *cv*. Q. *vr* :: *t.r.* liquet eſſe T. R. :: *t.r.* ergo ſimilium hyperbolicorum conoideon hyperbolis convenit habere latera proportionalia. Hæ verò ex *Archimedis* ſententia ſimiles cenſentur.

De *ſphæroidibus* verò *figuris* hæc ſuppoſuimus.

VI. Si *ellipſis* manente majori diametro circumducta reſtituatur eò unde proceſſerat, deſcriptam ab ellipſe figuram appellari *ſphæroides ob'ongum*. Quòd ſi manente minori diametro circumducta ellipſis reſtituatur unde proceſſit, deſcriptam ab ellipſe figuram vocari *ſphæ-*

Proponitur autem contemplandum quod &c. ſubjicit Prop.

ſphæroides prolatum: utriuſque verò ſphæroidis *axem* appellari manentem diametrum: *verticem* verò punctum, quo axis occurrit ſuperficiei ſphæroidis: *centrum* verò dici punctum axis medium, & diametrum, ductam per centrum axi perpendicularem.

Sit *e.g. ellipſis* V B X A, cujus major diameter V X minorem B A ſecet pependiculariter in C; ſi circa V X revolvatur *ellipſis*, fiet *ſphæroides oblongum*, cujus *axis* V X, *vertices* V, X; *diameter* B A; ſin verò circa B A rotetur, procreabitur *ſphæroides prolatum*, cujus *axis* B A, *vertices* B, A, *diameter* V X, *centrum* verò utriuſque eſt punctum C.

Fig. 113. VII. Et ſi utrumvis *ſphæroides* contingant parallela plana, non ſecantia; tangentibus autem planis parallelum ducatur aliud planum, ſecans ſphæroides; productarum quidem portionum *baſin* appellari quod à ſphæroidis in plano ſecanti ſectione intercipitur: *vertices* autem puncta, ad quæ parallela plana *ſphæroides* contingunt: *Axes* verò, quæ è recta vertices connectente in portionibus intercipiuntur, rectas.

Sphæroides videlicet Q S D G tangant parallela plana D T, Q Y, & his parallelum planum S H G ſecet; cui occurrat tactus connectens D Q in E; erit ſectio S H G baſis; & D, Q vertices; & D E, Q E axes portionum S D G, S Q G.

VIII. Similes verò dici *ſphæroides figuras*, quarum axes diametris proportionales ſunt.

Hinc ex *Archimedis* ſententia *ſimiles ellipſes* definiuntur, quarum axes conjugati ſunt proportionales; vel quarum ad axes figuræ ſimiles, vel quarum latera proportionalia.

IX. Similes verò dici *ſphæroideon*, & *conoideon* figurarum portiones, ſiquidem à ſimilibus figuris ablatæ ſunt, & baſes ſimiles habent, & axes ipſorum vel baſium planis recti exiſtentes, vel cum homologis baſium diametris æquales facientes angulos, eandem inter ſe rationem habent, quam homologi baſium diametri.

Sint nempe portiones B V A, *bva* à ſimilibus conoidibus vel ſphæroidibus diremptæ, quarum axes V K, *vk* cum baſium diametris B A, *ba*; & H F, *hf* æquales faciant angulos; & ſit V K. *vk* :: B A *ba* :: H F. *hf*; juxta definitionem hanc ſimiles erunt hæ portiones. Fig. 114. 115.

Proponitur & de ſphæroideis hæc ſpeculari, quòd *&c.* (ſubjicit prop. . . . .)

Dictis verò theorematis demonſtratis per ipſa reperiuntur complura cùm theoremata tum problemata, quale eſt hoc: quòd *ſimilia ſphæroidea*, nec non *ſimiles ſphæroideum*, ac *conoideum* portiones *triplicatam*

inter

inter ſe rationem habent axium. Et, *quòd in ſphæroidibus figuris æqualibus quadrata diametrorum proportione reciprocantur axibus*; &, *ſi in ſphæroidibus figuris quadrata diametrorum reciprocentur axibus æqualia ſunt ſphæroidea.* *Problema* verò hujuſmodi: *A datâ portione ſphæroidis aut conoidis, portionem abſcindere plano ad datum planum parallelo, ita ut abſciſſa portio æquetur dato cono, vel cylindrò, vel datæ ſphæræ.* Præmittentes igitur & *theoremata*, & **epitagmata* ad eorum demonſtrationes uſum habentia, poſtea tibi *problemata* conſcribemus. Vale.

* hoc eſt, Propoſitiones Lemmaticas, vel ſubſidiarias.

X. Si *conus* plano ſecetur in omnia coni latera incidenti, ſectio vel *circulus* erit vel *ellipſis*: & ſiquidem igitur ſectio ſit *circulus*, liquet interceptam ab ipſo portionem versùs verticem coni, fore conum. Si verò ſectio ſit *ellipſis*, è cono ad verticem dirempta figura dicatur *abſegmentum* coni: Abſegmenti verò baſis dicatur *planum* ab *ellipſe* comprehenſum: *vertex* verò punctum, quod & coni *vertex* eſt: *Axis* verò à vertice coni ad centrum ellipſis connexa recta. ἀπότμαμα.

XI. Ac, ſi *cylindrus* duobus planis parallelis ſecetur in omnia cylindri latera incidentibus, ſectiones vel *circuli* erunt, vel *ellipſes æquales*, & mutuò ſibi ſimiles. Siquidem igitur ſectiones circuli fiant, patet quòd reſecta à cylindro figura inter parallela plana, cylindrus erit: ſin verò ſectiones fiant *ellipſes*, abſumpta à cylindro figura inter parallela plana cylindri ſegmentum vocetur: *baſes* autem ſegmenti vocentur plana ſub *ellipſibus* comprehenſa: *Axis* autem recta *ellipſium* centra connectens. (Erit autem hæc in eadem recta cum axe cylindri.)

Hæc clara ſunt, nec explicationem deſiderant. Videntur autem loco ſuo excidiſſe; nos ea certè non immeritò definitionibus ac hypotheſibus accenſemus. Non ſunt *epitagmata*, quæ pollicetur *Archimedes*, ut exiſtimat non nemo.

Prop. I.

Si quotlibet ſint magnitudines (a, b, c, d) *æquali ſeſe excedentes, ſit autem exceſſus æqualis minimæ* (a); *& aliæ magnitudines multitudine quidem æquales his, magnitudine verò æquales maximæ* (d); *omnes magnitudines, quarum unaquæque æquatur maximæ, omnium quidem æqualiter ſeſe excedentium minores erunt quàm duplæ; reliquarum autem ſive maximâ majores quàm duplæ.* Fig 116.

Nam ſumma omnium æqualium maximæ eſt

$$\begin{array}{r|l} d & \\ c+ & a \\ b+ & b \\ a+ & c \\ \hline & \end{array}$$

hoc eſt $d+2c+2b+2a$; quæ ſumma deficit à dupla omnium per maximam d, & reliquarum duplam eodem exceſſu ſuperat.

Schol.

0. 3. 6. 9.
9. 6 3 c.
9. 9. 9. 9.

1. Si quantorum talis ſeries (hoc eſt Arithmeticè proportionalium) incipiat à 0 (ſeu nihilo) & maximus terminus ſit d, numerus autem terminorum dicatur n; ſumma terminorum erit $\frac{nd}{2}$. quæ propoſitio nihil fermè differt ab hac *Archimedea*.

$a+0.$
$a+1x.$
$a+2x.$
$a+3x.$

2. Sit quælibet ſeries Arithmeticè proportionalium, in qua minimus terminus ſit a communis exceſſus x, & numerus terminorum dicatur n; liquet omnium ſummam eſſe $na+\frac{nn-n}{2}x$.

Nam hæc ſumma conſtat ex ſerie æqualium, & ſerie arithmetica à nihilo incipiente, cujus maximus terminus eſt $nx-1x$.

Prop. 11.

Si quotvis magnitudines (A, B, C, D) *aliis magnitudinibus multitudine æqualibus* (E, F, G, H) *binæ binis, prout ordine diſponuntur, proportionales ſint* A.B :: E.F & B.C :: F.G *&c*); **referantur verò tam primæ magnitudines ad alias magnitudines* (K, L, M) *vel omnes, vel ipſarum aliquæ in quibuſvis rationibus, (ita ut homologæ ſint in iiſdem rationibus* (A.K :: E.N. & B.L :: F.O *&c.*) *Omnes primæ magnitudines ad omnes quibuſcum conferuntur, eandem rationem habebunt, quam omnes poſteriores magnitudines ad omnes quas ipſæ reſpiciunt.*

* *rationem habeant.*

A B. C. D. E. F. G H.
K. L. M. N. O. P.

Nam ob K. A [a] :: N.E. & A.B [b] :: E.F. & B.L [b] :: F.O. erit ex æquo K.L :: N.O. Similique diſcurſu L.M :: O.P. Eſt autem A+B +C+D. A [c] :: E+F+G+H.E. & A. K [b] :: E, N. & K. K+L +

a *hyp & cor.* 4 5
b *hyp.*
c 18. 5.

+ M [c] :: N. N + O + P. ergo ex æquo A + B + C + D. K + L + M :: E + F + G + H. N + O + P. *Q.E.D.*

Prop. III.

Si quotcunque ſint lineæ (X) *æquales inter ſe, & earum unicuique ſpatium applicetur excedens figurâ quadratâ, latera verò* (A,B,C,D) *exceſſuum æquali ſeſe excedant, & ſit exceſſus æqualis minimo* (A); *ſint verò etiam alia ſpatia, multitudine quidem æqualia his, ſed magnitudine ſingula æqualia maximo* (D X + Dq): *hæc ad omnia quidem alia ſpatia minorem habebunt rationem eâ, quam habet æqualis utrique ſimul & lateri maximi excedentis quadrati, & uni æqualium, ad æqualem utrique ſimul, & tertiæ parti lateris maximi excedentis quadrati, & ſemiſſi unius æqualium; ad reliqua verò ſpatia ſine maximo majorem rationem habebunt, eâdem ratione.* Fig. 117.

Hoc eſt (ſi linearum multitudo dicatur *n*, & inæqualium ſpatiorum aggregatum dicatur Z) erit *n* D X + *n*Dq, Z ⊐ X + D. $\frac{1}{2}$ X + $\frac{1}{3}$ D. &, *n* D X + *n*Dq, Z —: D X + Dq ⊏ X + D. $\frac{1}{2}$ X + D.

1. Nam quia [a] ſunt A X, B X, C X, D X ut A, B, C, D; hoc eſt juxta primam hujus [b], erit A X + B X + C X + D X ⊏ $\frac{DX}{2}$. [c] item A q + Bq + Cq + Dq ⊏ $\frac{n\,Dq}{3}$. eſt verò Z [d] = X + Aq + B X + Bq + C X + Cq + D X + Dq. [e] ergo D X + *n*Dq. Z ⊐ (*n*D X + *n*Dq. $\frac{nDX}{2} + \frac{nDq^2}{3}$ ::) X + D. $\frac{X}{2}$ + $\frac{D}{3}$. *Q.E.D.*

[a] 1. 6.
[b] 1 *hujus.*
[c] 1 *cor.* 10. *de Helic.*
[d] *hyp.*
[e] 8. 5.

2. Porro, quia A X + B X + C X [b] ⊐ $\frac{nDX}{2}$, & Aq + Bq [f] + Cq ⊐ $\frac{nDq}{3}$. [c] erit *n*DX + *n*Dq. A X + Aq + B X + Bq + C X + Cq ([a] hoc eſt *n* D X + *n* Dq Z —: D X + Dq) [c] ⊏ *n* DX + *n* Dq. $\frac{nDX}{2}$ + $\frac{nD}{3}$ :: X + D. $\frac{X}{2}$ + $\frac{D}{3}$. *Q.E.D.*

[f] 2 *cor.* 10 *de helic.*

Nam summa omnium æqualium maximæ est

$$\begin{array}{l} d \\ c+a \\ b+b \\ a+c \\ \hline \end{array}$$

hoc est $d+2c+2b+2a$; quæ summa deficit à dupla omnium per maximam d, & reliquarum duplam eodem excessu superat.

Schol.

0.3.6.9.
9.6 3 c.
9.9.9.9.

1. Si quantorum talis series (hoc est Arithmeticè proportionalium) incipiat à 0 (seu nihilo) & maximus terminus sit d, numerus autem terminorum dicatur n; summa terminorum erit $\frac{nd}{2}$. quæ propositio nihil fermè differt ab hac *Archimedea.*

$a+0.$
$a+1x.$
$a+2x.$
$a+3x.$

2. Sit quælibet series Arithmeticè proportionalium, in qua minimus terminus sit a communis excessus x, & numerus terminorum dicatur n; liquet omnium summam esse $na+\left.\begin{array}{r} nn \\ -n \\ \hline 2 \end{array}\right\}x.$

Nam hæc summa constat ex serie æqualium, & serie arithmetica à nihilo incipiente, cujus maximus terminus est $nx-1x$.

Prop. II.

Si quotvis magnitudines (A, B, C, D) *aliis magnitudinibus multitudine æqualibus* (E,F,G,H) *binæ binis, prout ordine disponuntur, proportionales sint* A.B::E.F & B.C :: F.G &c); **referantur verò tam primæ magnitudines ad alias magnitudines* (K, L, M) *vel omnes, vel ipsarum aliquæ in quibusvis rationibus, (ita ut homologæ sint in iisdem rationibus* (A.K :: E.N. & B.L :: F.O &c.) *Omnes primæ magnitudines ad omnes quibuscum conferuntur, eandem rationem habebunt, quam omnes posteriores magnitudines ad omnes quas ipsæ respiciunt.*

* *rationem habeant.*
A.B.C.D. E.F.G.H.
K.L.M. N.O.P.

Nam ob K.A[a] :: N.E. & A.B[b] :: E.F. & B.L[b] :: F.O. erit ex æquo K.L :: N.O. Similique discursu L.M :: O.P. Est autem A+B+C+D. A[c] :: E+F+G+H.E. & A.K[b] :: E.N. & K.K+L

a *hyp & cor.* 45
b *hyp.*
c 18. 5.

+

+ M [c] :: N. N + O + P. ergo ex æquo A + B + C + D. K + L + M :: E + F + G + H. N + O + P. *Q.E.D.*

Prop. III.

Si quotcunque ſint lineæ (X) *æquales inter ſe, & earum unicuique ſpatium applicetur excedens figurâ quadratâ, latera verò* (A,B,C,D) *exceſſuum æquali ſeſe excedant, & ſit exceſſus æqualis minimo* (A); *ſint verò etiam alia ſpatia, multitudine quidem æqualia his, ſed magnitudine ſingula æqualia maximo* (D X + Dq): *hæc ad omnia quidem alia ſpatia minorem habebunt rationem eâ, quam habet æqualis utrique ſimul & lateri maximi excedentis quadrati, & uni æqualium, ad æqualem utrique ſimul, & tertiæ parti lateris maximi excedentis quadrati, & ſemiſſi unius æqualium; ad reliqua verò ſpatia ſine maximo majorem rationem habebunt, eâdem ratione.* Fig. 117.

Hoc eſt (ſi linearum multitudo dicatur *n*, & inæqualium ſpatiorum aggregatum dicatur Z) erit *n* D X + *n*Dq, Z ⊐ X + D. $\frac{1}{2}$ X + $\frac{1}{3}$ D. &, *n* D X + *n*Dq. Z —: D X + Dq ⊏ X + D. $\frac{1}{2}$ X + $\frac{1}{3}$ D.

1. Nam quia [a] ſunt A X, B X, C X, D X ut A, B, C, D; hoc eſt juxta primam hujus [b], erit A X + B X + C X + D X ⊏ $\frac{n\,D\,X}{2}$. [c] item A q + Bq + Cq + Dq ⊏ $\frac{n\,Dq}{3}$. eſt verò Z [d] = A X + Aq + B X + Bq + C X + Cq + D X + Dq. [e] ergo *n*D X + *n*Dq. Z ⊐ (*n*D X + *n*Dq. $\frac{n\,D\,X}{2}$ + $\frac{n\,Dq}{3}$ ::) X + D. $\frac{X}{2}$ + $\frac{D}{3}$. *Q.E.D.*

[a] 1. 6.
[b] 1 *hujus.*
[c] 1 *cor.* 10. *de Helic.*
[d] *hyp.*
[e] 8. 5.

2. Porro, quia A X + B X + C X [b] ⊐ $\frac{n\,D\,X}{2}$, & Aq + Bq + Cq [f] ⊐ $\frac{n\,Dq}{3}$. [e] erit *n*DX + *n*Dq. A X + Aq + B X + Bq + C X + Cq ([a] hoc eſt *n* D X + *n* Dq. Z —: D X + Dq) [e] ⊏ *n* DX + *n* Dq. $\frac{n\,DX}{2}$ + $\frac{n\,D}{3}$ :: X + D. $\frac{X}{2}$ + $\frac{D}{3}$. *Q.E.D.*

[f] 2 *cor.* 10 *de helic.*

Prop. IV.

Fig. 118. *Si ab eadem parabola quomodocunque duæ resecentur portiones* (B V A, S D G) *quæ æquales habeant diametros* (V K, D E); *tam ipsæ portiones æquales erunt, quàm ipsis inscripta triangul.* (B V A, S D G) *basim habentia eandem cum portionibus, & eandem altitudinem.*

Sit primùm A K ad V K perpendicularis; & R, S sint parametri diametrorum V K, D E ergo ductâ G L ad D E (protractam) perpendiculari, est G Eq. G Lq [a] :: S. R :: [b] S × V K. R × V K [c] :: S × DE. R × V K [c] :: G Eq. A Kq. [c] unde G L = A K [f] ergo triangula G D E. A V K æquantur, & horum dupla triangula G D S, A V B; & horum ſ. ſqualteræ parabolæ G D S, A V B. *Q.E.D.* Simili discursu quævis alia portio parem habens ipsi V K diametrum portioni B V A, adeóque portioni S D G æquabitur: unde constat propositum.

a *ſch* 49. 1. *Apol.*
b 1. 6.
c 7. 5.
d 11 & 49. 1. *Apol.*
e 9. 5.
f 1. 6.

Cor. Si diametri V K, D E portionum æquentur, perpendiculares G L, A K æquabuntur.

Prop. V.

Fig 119. 120. *Omne ſpatium comprehenſum ab ellipſe* (V B X A) *ad circulum* (V C X α) *habentem diametrum æqualem majori ellipſis diametro* (V X) *eandem rationem habet, quam minor ejus diameter* (B A) *ad majorem* (V X), *hoc eſt ad circuli* (V C X α) *diametrum.*

* *intellige ſatis Elliptico.*
a 8. 1. *de ſph.*

Dico circulum diametro Z = √ V X × B A æquari *ellipſi. Si negas, esto primùm circulus Z major ellipſe; circulo igitur Z [a] inscriptum cogita polygonum parilaterum majus ellipſe, & huic simile aliud circulo (V C X α), à cujus angulis demittantur perpendiculares μ D, ν E &c. occurrentes ellipſi punctis M, N &c. & connectantur B M, M N, N V &c. Estque jam C Cq. μ Dq [c] :: X C × C V. X D × D V [c] :: B Cq. M Dq. & permutando C Cq. B C q :: μ Dq. M Dq. unde C C. B C ([d] hoc est triang C D C. B D C) [e] :: μ D. M D ([d] hoc est triang μ C D. M B D). [f] quare C C. B C :: trapezium C C D μ. B C D M. Simili discursu est trap μ D E ν. M D E N :: μ D. M D :: C C. B C. idemque pariter ostendetur de reliquis trapeziis ac triangulis. [g] quare totum polygonum circuli V C X α ad totum polygonum ellipſis se habet ut C C ad B C, vel V X ad B A; [h] hoc est ut V Xq ad V X × BA, [h] hoc est ut polygonum circuli V C X α ad polygonum circuli Z. [k] ergo

c 21. 1. *Apoll.*
d 1. 6.
e 22. 6.
f 12. 5.
g 1. 6.
h 1. 12.
k 9. 5.

30 polygonum circuliZ ellipſis polygono æquatur; Sed majus erat toto ſpatio elliptico, quæ repugnant. Similis continget repugnantia, ſi dicatur ellipſis major circulo Z; inſcribendo ſcilicet ellipſi figuram quæ major ſit circulo Z, & per ejus angulos ducendo perpendiculares D M μ. E N ν, &c. & inſcribendo circulo Z figuram ſimilem ipſi V ν μ C X; unde demonſtrabitur figura ellipſis æqualis figuræ circuli Z, quæ tamen toto circulo Z major ponebatur: ergo potiùs circulus Z ellipſi æquatur. Hinc ellipſis ſe habet ad circulum V C X α, [p] ut circulus Z ad circulum V C X α, [q] hoc eſt ut Zq [r] vel V X × B A ad V Xq, [s] hoc eſt ut B A ad V X. *Q.E.D.*

[l] 9. *ax.* 1. [p] 7. 5. [q] 2. 12. [r] *hyp.* [s] 1. 6.

Facilè colligitur hoc viâ indiviſibilium. Quoniam C Cq. μ Dq :: X C × C V. X D × D V :: B Cq. M Dq. erit C C. B C :: μ D. M D :: ν E. N E. [*] :: C C + μ D + ν E. B C + M D + N E. & omnes C C, μ D, ν E componunt ſemicirculum V C X, omnes vero B C, M D, N E conficiunt ſemiellipſim V B X; ergo ſimicirculus ad ſemiellipſim ſe habet ut C C ad B C; vel ut C α ad B A.

[t] 21. *I. Apoll.* [*] 12. 5.

Prop. VI.

Omne ſpatium comprehenſum ab ellipſe (V B X A) *ad quemlibet circulum* (Z) *eandem habet rationem, quam comprehenſum ab ellipſis diametris* (V X, B A) *rectangulum ad quadratum* (Zq) *diametri circuli.* Fig. 121.

Nam ell. V B X A. ⊙ V C X α [a] :: B A. V X [b] :: B A × V X. V Xq & ⊙ V C X α. ⊙ Z [c] :: V Xq. Zq. ergo ex æquo ell. V B X A. ⊙ Z :: B A × V X. Zq. *Q.E.D.*

[a] 5. *hujus.* [b] 1. 6. [c] 2. 12.

Prop. VII.

Sub ellipſibus (A B C D, E F G H) *comprehenſa ſpatia eandem inter ſe rationem habent, quam comprehenſa ab ellipſium diametris rectangula* (A C × B D, E G × F H) *inter ſe.* Fig. 122. 123.

Sit quivis circulus diametro Z; éſtque A C × B D Zq [a] :: ellipſ. A B C D. ⊙ Z. & Zq. E G × F H [a] :: ⊙ Z. ellipſ E F G H. ergo ex æquo A C × B D. E G × F H :: ellipſ A B C D. E F G H. *Q.E.D.*

[a] 6 *hujus.*

Coroll.

Hinc liquet comprehenſa ſub ellipſibus ſimilibus ſpatia homologorum diametrorum quadratis proportionalia fore.

Nempe

Nempe posito fore A C. B D :: E G. F H ; erit ellipſ A B C D. E F G H :: A Cq. E Gq :: B Dq. F Hq. Nam A C * B D. B Dq :: A C. B D :: E G. F H :: E G * F H. E Hq. & permutando AC * BD. E G * F H :: B Dq. F Hq, hoc eſt ellipſ A B C D. E F G H :: BDq. F Hq, vel A Cq. E Gq.

Lemmata.

I.

Fig. 124. Sit conus Scalenus, in quo B V A triangulum per axem rectum baſi B F A ; recta verò V K biſecet angulum B V A, & B D ſit ad V K perpendicularis ; ſi igitur per B D tranſeat planum B E D triangulo B V A rectum, [a]patet ellipſim fieri, cujus centrum C minor axis B D ; quòd ſi ducatur C E ad B D perpendicularis in dicto plano B E D, erit C E ſemiaxis major ; & C E plano V B A [b]recta erit, [c]adeóque planum per V C, C E plano V B A quoque rectum erit. Producatur V E, occurrens baſi coni in F, & connectatur F K. [d] liquet F K (communem nempe ſectionem planorum (B F A, V C E) rectam eſſe plano V B A ; [e]adeóque parallelam ipſi C E, [f] & perpendicularem ipſi B A. Eſt [g]igitur K Fq (B K * K A). V Kq :: C Eq. C Vq. Hæc analyſis eſt *Archimedei* quod ſubſequitur *problematis*, perſpicuitatis ergò appoſita ; quali ſimilem decimæ propoſitionis intelligentiæ conducentem, hujus exemplo, tibi deducendam relinquimus.

a 13. 1 *Apol.*
b 4 *def.* 11.
c 18. 11.
d 19. 11.
e 6. 11.
f 3. *def.* 11.
g 4. & 22. 6.

II.

Fig. 125. Recta V C biſecet angulum B V A, & B D ad V C perpendicularis ſit ; oportet per B ducere rectam B A occurrentem rectæ V C protractæ in K, ita ut V Kq ad B K * K A rationem habeat datam V Cq ad Tq.

Fiat V C. T [a]:: T. C H ; & ad C H [b] deſcribatur ſegmentum circuli capiens angulum æqualem angulo C V B, & ſecet iſte circulus rectam V D in M ; & ductis M C N, M H, fiat B A ad N M parallela. Dico factum. Nam ob [c]æquiangula triangula C V N, C M H, erit V C. M C [d]:: C N C H. unde M C * C N [e] = V C * C H [f] = Tq. Eſt autem V Cq. C M * C N [g] :: V Kq. K B * K A. [h] ergo V Cq. Tq :: V Kq. K B * K A. *Q.E.F.*

a 13. 6.
b 35. 3.
c *conſt.* & 15. 1
d 4. 6.
e 16. 6.
f *conſt.* & 17. 6.
g *ſch.* 23. 6.
h 7. & 11. 5.

Not. debet eſſe T ⊏ B C. quia quum angulus C D M ſit [l]æqualis angulo C B X, [m]hoc eſt major angulo C N B, [n]erit M C. C D ⊏ C B. C N. [o] adeóque M C * C N ⊏ C D * C B, hoc eſt Tq ⊏ B Cq.

l *conſt.* & 5. 1.
m 16. 1.
n *ſch.* 6. 6.
o *ſch.* 16. 6.

Prop.

ig. 126.

mm prac.

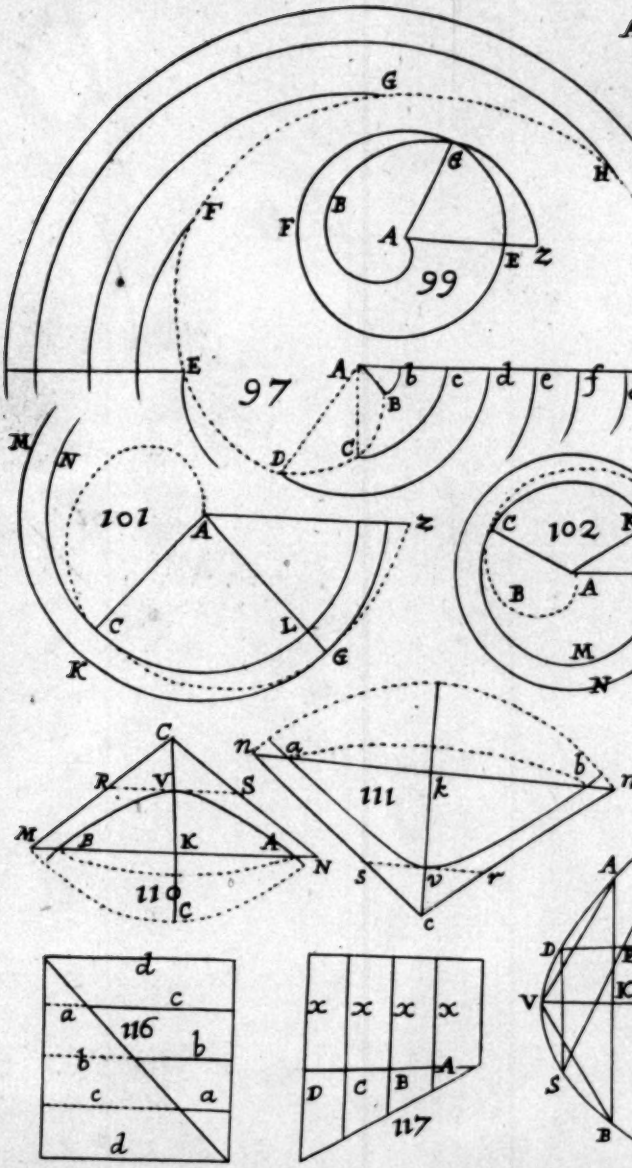
def. 11.

ıß.
& 21 6.
6.
. 1 Apoll.
. 23. 6.
. 3. & 7. 5.
6.
w. 4. 6.
l. Apoll.

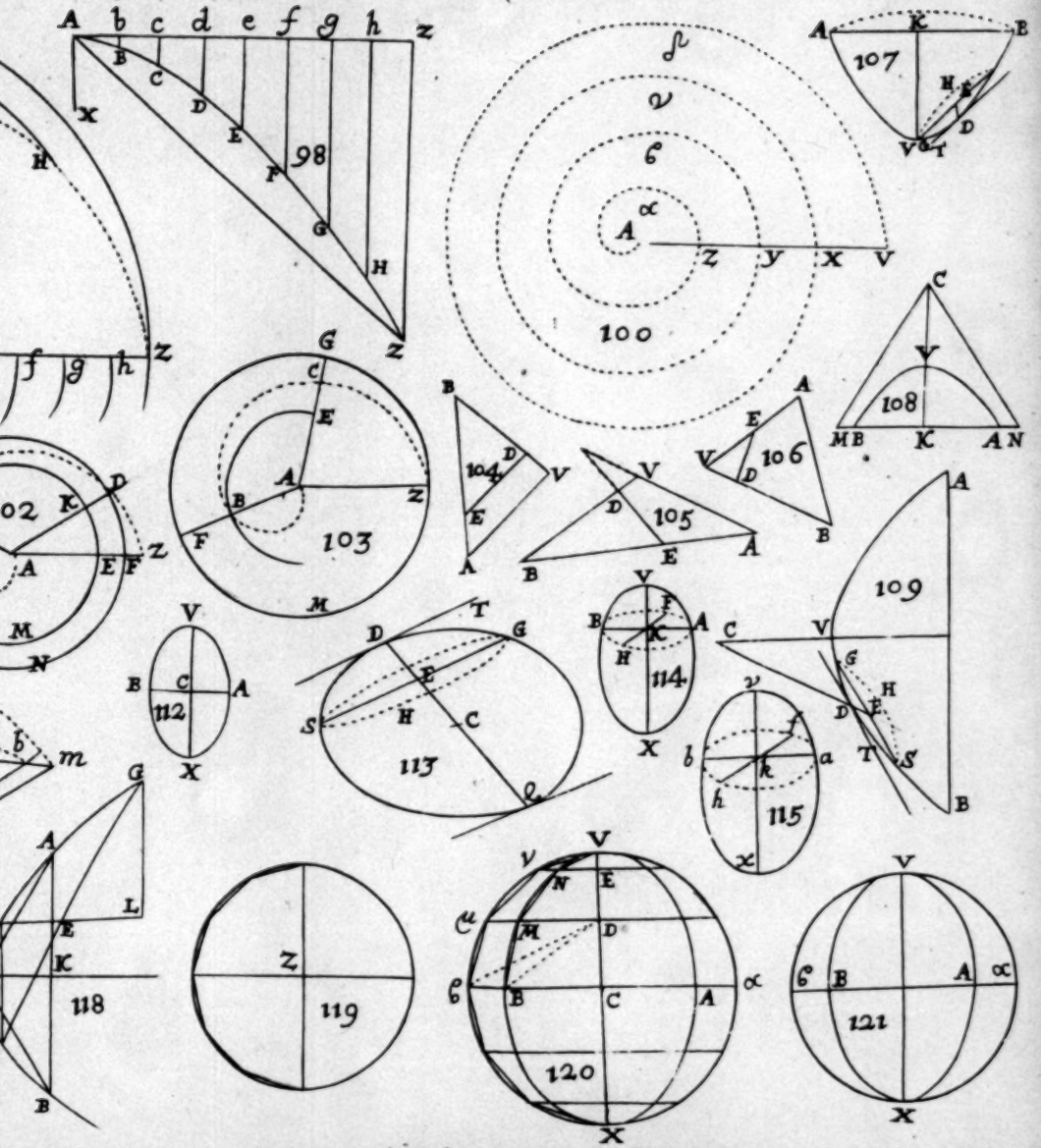
. 127.

& 12. 6
l Apol.

. 11¾



99
97
101
102
110
111
116
117



Archimedes. Pag. 78.

Fig. 124.

a 13. 1 *Apol.*
b 4 *def.* 11.
c 18. 11.
d 19. 11.
e 6. 11.
f 3. *def.* 11.
g 4. & 22. 6

Fig. 125

a 13. 6.
b 35. 3.
c *conſt.* &
d 4. 6.
e 16. 6.
f *conſt.* &
g *ſch.* 23.
h 7. & 11
i *conſt.* &
m 16. 1.
n *ſch.* 6.
o *ſch.* 16.

Prop. VIII.

Datâ ellipſe, & lineâ (C V) *à centro* (C) *ellipſis excitatâ, ad planum, in quo eſt ellipſis, rectâ, poteſt inveniri conus, qui verticem habeat excitatæ lineæ terminum* (V) *in cujus ſuperficie ſit ellipſis data.* Fig. 126.

Sit B D minor axis, & ſemiaxis major ſit T. Jungantur B V, D V, & [a]fiat Tq. C Vq :: B K × K A. V Kq (quod fieri poteſt, quia T ⊏ B C). Erit B A diameter baſis coni, cujus vertex V, qui complectitur datam ellipſim. [a] *Lemm prac.*

Sit enim punctum quodvis L in ellipſe, à quo demittatur L H perpendicularis ad B D [b](adeóque recta plano V B D, cui recto inſiſtit planum ellipſis). producatur V H M, & aſſurgat M N plano V B A recta, dicti coni ſuperficiem attingens in N. Ducantur denuò per K, M rectæ P Q, R S ad B D parallelæ. Eſtque Tq. C Vq [c] :: B K × K A. V Kq. & C Vq. C Bq :: K Vq. K P × K Q, ergo ex æquo Tq. C Bq ([d]hoc eſt H Lq. B H × H D) :: B K × K A. K P × K Q [e] :: B M × M A. R M × M S. Item B H × H D. H Vq [f] :: R M × M S. M Vq. ergo rurſus ex æquo H Lq. H Vq :: B M × M A. M Vq. ([g]hoc eſt) :: M Nq. M Vq. [h]unde H L. H V :: M N. M V. [i]quare V L N eſt recta linea; [k]adeóque punctum L in ſuperficie coni. Similíque ratione tota ellipſis eſt in eadem ſuperficie. *Q. E. F.* [b] 4. *def.* 11. [c] *conſt.* [d] 4. & 21 6. [e] 7. 6. [f] 21. *I Apoll.* [g] *ſch.* 23. 6. [h] 35. 3. & 7. 5. [i] 22. 6. [k] *conv.* 4. 6. [l] 1. *I. Apoll.*

Prop. IX.

Datâ ellipſe & lineâ (C V) *ab ellipſis centro* (C) *non rectè excitatâ in plano, quod per unam diametrum* (B D) *aſſurgit rectum plano, in quo eſt ellipſis; poteſt inveniri conus, verticem habens excitatæ terminum* (V), *in cujus ſuperficie erit data ellipſis.* Fig. 127.

Conjungantur V B, V D, & fiat V A = V B; & connexâ B A, per C ducatur E F ad B A parallela. Sit autem T altera ſemidiameter datæ ellipſis; & [a]fiat E C × C F. Tq :: B Aq. Sq; tum in plano per B A ad planum V B A recto [b]deſcripta ſit ellipſis, cujus axes A B, S. Hanc complectatur conus habens verticem V (juxta præcedentem; is quoque datam ellipſim comprehendet. Sumatur enim in data ellipſe quodvis punctum L, à quo ducatur L H perpendicularis rectæ B D [c] adeóque recta plano B V D) & extendatur V H M; & M N recta plano B V A (hoc eſt in plano repertæ ellipſis) coni ſuperficiem attingat in N; & per M ducatur R S ad B D parallela. Eſtque Tq. E C [a] 13. & 12. 6 [b] 54. *I Apol.* [c] 4 *def.* 11.

d *conſt.* e 15. 5. f 21. *I Apoll.* g *ſch.* 23. 6. h 22. & *cor.* 4. 6.

EC × CF[d] :: Sq. BAq[e] :: $\frac{1}{4}$SQ, $\frac{1}{4}$BAq :: [f] MNq. BM × MA. Item EC × CF. BC × CD[g] :: BM × MA. RM × MS. ergo ex æquo Tq. BC × CD ([f] hoc eſt HLq. BH × HD) :: MNq. RM × MS. [g] quinetiam BH × HD. VHq :: RM × MS. VMq. ergo rurſus ex æquo HLq VHq :: MNq. VMq. [h] unde patet punctum L eſſe in latere VN coni; ſimiliſque jure tota ellipſis eſt in ſuperficie dicti coni. *Q. E. F.*

Nota, ſi EC × CF = Tq, fore BA diametrum circuli, ſeu baſis dicti coni.

Prop. X.

Fig. 128. *Datâ ellipſe, & lineâ* (CD) *ab ellipſis centro* (C) *erectâ in plano, quod ab una diametro* (AB) *excitatur rectum plano, in quo eſt ellipſis; poteſt inveniri cylindrus, axem habens in directum excitatæ lineæ* (CD), *cujus in ſuperficie erit data ellipſis.*

a *ſch.* 2 6. b 4 *def.* 11. c *hyp.* d 21. *I Apol.* e *ſch.* 23. 6. f 9. 5. g 35. 3. h *conſt.* & 4. *def.* 11. k 6. 11.

Ducantur AF, BG ad CD parallelæ, quas perpendiculariter fecet recta FDG; & ob AC = CB, [a] eſt FD = DG. Jam ſi FG alteræ ellipſis diametro NO æquetur, erit circulus centro D per F, G deſcriptus, & rectus plano FABG, baſis cylindri, quem deſideramus. Sit enim quodvis punctum H in ellipſe; à quo ducatur HK ad AB [b] perpendicularis, & per K ducatur KL ad CD parallela; & ſit LM ad FG perpendicularis. & quoniam HKq. NCq [e] (FDq) :: [d] AK × KB. ACq [e] :: FL × LG. FDq; erit HKq [f] = FL × LG [g] = LMq. ergo HK, LM ſunt pares. Sed & ambæ [h] rectæ ſunt plano FABG; [k] adeóque parallelæ. ergo liquet punctum H eſſe in latere dicti cylindri per M ducto.

Quòd ſi NO major ſit quàm FG, fiat FP = NO; erit FP diameter baſis cylindri, itidem rectæ plano FDC. quod è ſimili conſtabit diſcurſu.

l *ſch.* 47. 1. m 18. 11. n 4 *def.* 11. o 3. *def.* 11. p 28. 1. q *conſtr.* r 10. 11. s 4. & 22. 6.

Sin demùm ſit NO minor quàm FG, [l] fiat DX = $\sqrt{}$: DFq — CNq. & plano ACX recta erigatur XR = CN, & connectatur DR; erit circulus radio DR, in plano FDR deſcriptus, baſis cylindri, qui datam ellipſim complectetur. Nam ſtantibus, quæ priùs adſumpta ſunt, ducantur LS ad FG, & ST ad KL protractam perpendiculares. Et quia plana RXD, FDX ſibi mutuò [m] recta ſunt, [n] erit FD recta plano RXD, [o] adeóque lineæ RD; [p] ergo RD, SL parallelæ ſunt. Sed & DX, LT [q] parallelæ ſunt. [r] ergo triangula RDX, SLT ſimilia ſunt. [s] Quamobrem eſt STq. SLq ([5] FL × LG)

* L G) :: R Xq. R Dq (D Fq.) nam eſt R Dq [t] = D Xq + XRq [t] 47. 1.
[q] = D Fq — C Nq + C Nq = D Fq). Item F L * L G. A K * K B [c] ::
F Dq. A Cq. ergo ex æquo S Tq. A K * K B :: R Xq [q] (N Cq)
A Cq [d] :: H Kq. A K * K B. [f] quare S Tq = H Kq. ergo cùm ſint
S T, H K parallelæ (perpendiculares enim ſunt ambæ plano FAKLT.
Nam planum S T L [u] rectum eſt plano F L T; adeóque S T ei re- [u] 15. 11.
cta) ſitque punctum S in ſuperficie dicti cylindri, erit H in eadem, &
pari ratione tota data ellipſis. *Q E. F.*

Prop. XI.

Quòd quidem omnis conus ad conum compoſitam habeat rationem ex rationibus baſium & altitudinum demonſtratum eſt ab anteceſſoribus; *ſch.* 15. 12.
& non abſimili modo demonſtratur quòd abſegmentum omne coni ad abſegmentum coni rationem habet compoſitam è rationibus baſium & altitudinum. Necnon quòd omne ſegmentum cylindri tripla ſit abſegmenti conici baſim habentis eandem cum ſegmento, & æqualem altitudinem: 10. 12.
eadem ſcilicet eſt demonſtratio cum illa, quòd omnis cylindrus triplus eſt coni baſin habentis eandem cum cylindro, & æqualem altitudinem.

Scholium.

Etiam hæc ſimili diſcurſu eliciantur.

1. Æquè alta ſegmenta cylindrica, & conica, baſibus proportio- *Vid.* 11. 12.
nalia ſunt.

2. Segmenta ad æquales baſes conſtituta ſunt inter ſe ut altitu- 14. 12.
dines.

3. Æqualium ſegmentorum proportione reciprocantur baſes & 15. 12.
altitudines.

Similia ſegmenta triplicatam habent rationem homologorum in ba- 11. 12.
ſibus diametrorum, (vel axium ſuorum).

Prop. XII.

Si conoides parabolicum ſecetur plano (D V K) *per axem* (V K) *vel* *Pars I.*
ad axem parallelo (D E G); *fiet coni ſectio eadem illi, quæ figuram* A.
intercipit; diameter autem ipſius erit communis ſectio (V K *vel* D E)
planorum; ejus (D E G) *quod figuram ſecat, & ejus* (V D E K) *quod* Fig. 129.
per axem ducitur rectum ſecanti plano. quòd ſi etiam ſecetur plano ad axem recto (B G A) *ſectio erit circulus, habens centrum* (K) *in axe.*

Quòd plano per axem procreetur parabola eadem illi cujus circumductu fiebat conoides, quódque plano ad axem recto intercipiatur circulus, in axe centrum habens, satis ex ipsa conoidis generatione perspicuo constat. Quòd autem sectio D G sit parabola, primò positæ æqualis sic ostendetur. Sumatur in sectione quodvis punctum G, à quo ducatur G E ad D E perpendicularis, [a] adeóque recta plano V D E (cui nempe planum D E G rectum ponitur). Per E ducatur B A ad D E, vel V K perpendicularis; [b] ergo D E plano per B E, E G recta est; [c] ergo axis V K eidem rectus est; quare B G A est circulus ad diametrum B A. Sit demum R parameter parabolæ B V A, & ducatur D Z ad V K perpendicularis. Estque E Gq [d] = B E × E A [e] = B Kq — E Kq [f] = B Kq — D Zq. Est verò B Kq [g] = R × V K, & D Zq [g] = R × V Z; [f] adeóque B Kq − D Zq = R × Z K = R × D E. [h] ergo E Gq = R × D E. [k] unde sectio D G erit parabola, cujus parameter R. *Q. E. D.*

a 4. *def.* 11.
b 4. 11.
c 8. 11.
d 35. 3.
e 5. 2.
f 3. *ax.* 1.
g 11. *Ap. Con.*
h 1. *ax.* 1.
k *conv.* 11. *Ap. Con.*

Pars 2. B. Fig. 130. *Si conoides hyperbolicum secetur plano* (D V K) *per axem* (V K) *vel ad axem parallelo* (D E G) *vel* (*plano* D F H) *per coni conoides complectentis verticem* (C) *erit sectio hyperbole; siquidem per axem eadem erit ei quæ figuram concepit; sin æquidistanter axi, similis illi; at si per verticem coni conoides complectentis, dissimilis ei. diameter autem sectionis erit communis sectio* (V K, *vel* D E, *vel* D F) *planorum, ejus quod secat figuram, & ejus quod per axem ducitur rectum secanti plano. Quòd si secetur plano* (B G A) *ad axem recto sectio erit circulus habens centrum in axe.*

Quòd sectio (D V K) per axem hyperbolam reddit illam, quæ conoides ipsum progenuit; & quod planum axi rectum intercipiat circulum, satis evidens est. Quòd si D E sit axi parallela; sint T V, V R latera hyperbolæ D V K, & à D ducatur D Z ad V K parallela; & protractâ E D fiat D X = T Z + V Z (T V + 2 V Z). & T V. V R :: X D. D S; faciunt verò T V, V R, & X D, D S angulos utcunque; & connexæ T R, X S producantur. Sumatur jam in sectione punctum quodvis G; à quo ducatur G E ad D E, [a] (adeóque ad planum D V K) perpendicularis; & per E ducatur B A ad V K perpendicularis, & E L ad D S parallela; denique per puncta Z, K ducantur Z Q, K P ad V R parallelæ. Estque jam E Gq [b] = B E × E A [c] = B Kq — E Kq = B Kq — D Zq [d] = V K × K P — V Z × Z Q. verùm (ductâ Q Y ad V K parallelâ) est V K × K P [e] = V Z × Z Q +

a *hyp.* & 4 *def.* 1.
b 35. 3.
c 5. 2.
d 12 *Ap. Con.*
e 1. 6.

+ YP + QY × KP = VZ × ZQ + VZ × YP + QY × KP. [f] ergo EGq = VZ × YP + QY × KP. est autem [g] XD, DS :: TV. VR. [h] hoc est XE. EL :: QY. YP ; (vel) :: DE. YP. [k] adeóque EL × DE = XE × YP [l] = TK + VZ × YP [c] = TK × YP + VZ × YP (hoc est) = QY × KP + VZ × YP ; (ob TK. KP [m] :: QY. YP ; [k] adeóque TK × YP = QY × KP) [n] ergo EGq = EL × DE. [o] quare liquet punctum G esse in hyperbola, cujus latera XD, DS, diameter DE ; quæ quidem hyperbola similis est ipsi BVA, quia XD. DS [l] :: TV. VR. *Q.E.D.*

f 23. ax. 1. g *const.* h 4. 6. & 11. 5. k 16. 6. l *const.* m 4. 6. n 1. ax. 1. o *conv.* 12. *1 Apoll.*

Coroll. $XD = TV + VZ = 2CZ.$

$DS = VR + \frac{VR}{TV} 2VZ.$

Quòd verò plani sectionem attinet per centrum C ductam, producatur FDC ad N, ita ut sit CN = CD ; & sectionem DVK tangant rectæ VM, DM ; & sumpto in sectione DF puncto quovis H ducatur HF ad DF perpendicularis, (adeóque recta plano FDVK) & per F ducantur BA ad VK perpendicularis, & FO ad DM parallela. Estque BF × FA. (FHq). FOq [p] :: MVq. MDq. ergo ordinatim applicatarum FH in sectione DH quadrata [q] se habent ut quadrata FO in sectione DO, [r] hoc est ut rectangula NFD. [s] ergo DH est hyperbole, cujus ND est axis transversus. quia verò EGq [t] ⊏ FHq ; & XE × ED ⊐ NF × FD (quia DE ⊐ DF & XD = 2CZ ⊐ 2CD) non erit EGq. XE × ED :: FHq. NF × FD ; [u] hoc est non erunt harum sectionum latera sibi proportionalia ; nec ideo similes erunt. ergo cùm sectio DG [y] sit ipsi BVA similis ; erit sectio DH eidem dissimilis. *Q.E.D.*

p 16. 3 *Apoll.* q 16. 5. r 21. *1 Apoll.* & *cor.* 5 1. s *conv.* 21. *1. Apoll.* t *cor.* 5. 2. u 21. *1. Apoll.* y *prius.*

Si quodvis sphæroides secetur plano (VBXA) *per axem* (VX) *vel ad axem parallelo* (DEL) *sectio erit ellipsis, siquidem per axem, ipsa illa qua figuram concepit ; sin æquidistanter axi, similis ei ; diameter verò sectionis erit communis sectio* (DE) *planorum ; ejus nempe quod secat figuram, ejusq; quod per axem ducitur rectum secanti plano : quinetiam si secetur plano recto ad axem, sectio circulus erit, habens centrum in axe.* *Pars* 3. C. Fig. 131.

Primum & ultimum è *sphæroidis* ortu satis liquidò verificantur.

Porro recta A V connectat axium (A B, V X) terminos A, V; & ducatur E S ad A V, & D S ad A B parallelæ. Sumatur autem utcunque punctum L in sectione, à quo ducatur L H ad D E perpendicularis; & per H recta M N ad V X perpendicularis. demùm rectæ A T, V T sectionem V A X contingant. Estque M H * H N (H Lq) D H * H E [a] :: V Tq. A Tq [b] :: C Aq. C Vq [c] :: D Sq. D Eq. [d] :: H Lq. D H * H E. [e] ergo sectio D L E est ellipsis, cujus axes sunt D E, D S; & similis ipsi V B X A; quia D S. D E [f] :: C A. C V [g] :: B A. V X.

a 16. 3 *Apol.*
b *conv.* 32. *I. Apol.* & 33. 1. *elem.*
c 4 & 22. 6.
d 11. 5.
e *conv.* 21. *I. Apol.*
f *constr.*
g 15. 5.

Pars 4. D. *Si dictarum figurarum quælibet plano* (B V A) *per axem* (V K) *secetur; à punctis* (G) *in superficie figuræ extra sectionem existentibus ductæ ad planum secans perpendiculares* (G E), *intra figuræ sectionem cadent.*

Fig. 132.

Per G ducatur planum axi, [a] (adeóque plano per axem) rectum; [b] ergo communis sectio B A erit diameter circuli B G A. [c] & perpendicularis G E cadet in B A. * ergo punctum E est intra sectionem B V A. Cunctis his subjecit *Archimedes:* Horum omnium perspicuæ sunt demonstrationes. Ita visum illi ἐξυπερτικῶς. Nos tamen lucem iis qualemcunque conati sumus accommodare; non nemo certè spissas tenebras offudit. (Cui placet immani tædio vexari, *Rivaltum* adeat in hæc commentantem, ipsiúsque desiderio, ni fallor, abundè satisfiet).

a 18 11.
b *prius.*
c 38. 11.
*

Prop. XIII.

Fig. 133. *Si concidens paraboli cum plano secetur, neque per axem* (V K) *nec æquidistanter axi, sectio* (D L E) *erit ellipsis. Diameter autem ejus major, erit recta* (D E) *intercepta in conoide à facta sectione planorum & ejus quod figuram secat, & ejus quod per axem transit rectum secanti plano: minor autem diameter æqualis erit distantiæ* (D F) *ductarum à majoris diametri terminis axi parallelarum* (D Q, E F).

Capiatur enim in sectione punctum quodvis L, à quo ducatur L H ipsi D E, [a] adeóque plano V D E, perpendicularis. & per H ducatur B A axi perpendicularis. Rectæ porro T S ad D E, & V N ad B A parallelæ tangant sectionem D V E, & ducatur T P ad V K perpendicularis. Estque ob V S [b] = P V, [c] etiam N S = N T. [d] ergo N Sq. N Vq [e] (hoc est :: D Eq. D Fq) N Tq. N Vq [f] :: D H * H E. B H * H A (hoc est) :: D H * H E. H Lq [g] :: D Eq. D Fq. ergo sectio D L E habet proprietatem ellipsis, cujus axes D E, D F. *Q E D.*

a *hyp.* & 4 *def.* 11.
b 35. *I Apol.*
c 2. 6.
d 7. 5.
e 4. & 22. 6.
f 16. 3. *Apol.*
g 11. 5.
h 21. *I Apol.*

Prop.

Coroll. Q H (æqualis dimidiæ diſtantiæ) eſt ſemiaxis minor.

Prop. XIV.

Si conoïdes hyperbolicum ſecetur plano (D E L) *coincidenti omnibus lateribus coni conoides complectentis, non ad rectos axi* (V K) *ſectio erit ellipſis, ejus autem major diameter erit illa* (D E) *quæ intercipitur à conoide à facta ſectione planorum & ejus quod ſecat figuram, & ejus quod per axem ducitur rectum ſecanti plano.* Fig. 134.

Nam eâdem factâ præparatione, qualis in præcedenti, monſtrabitur fore ſemper D H × H E. H Lq :: N Tq. N Vq. [a]unde ſectio erit ellipſis, & diameter ejus D E, major quidem alterâ, quia P V [b]⊏ V S; [c] adeóque T N ⊏ N S [d]⊏ N V.

a *conv.* 21. *I Apol.*
b *cor.* 36. *I Ap.*
c 2. 6. & 14. 5.
d 19. 1.

Coroll. Si fiat T N, N V :: E D. M. erit M altera diameter.

Prop. XV.

Si oblongum ſphæroides ſecetur plano (D E L) *non recto ad axem* (V X), *ſectio erit ellipſis. Diameter autem ipſius major erit illa* (D E) *quæ intercipitur in ſphæroide à facta planorum ſectione, ejuſque quod ſecat figuram, & illius quod per axem ducitur ſecanti plano rectum.* Fig. 135.

Quòd ſectio ſit ellipſis, cujus diameter D E non ſecus quàm in præcedentibus facilè apparat. Quòd verò D E ſit major è diametris, hinc (admiſſis quæ prius) patet, Per centrum C ducantur *b a* axi V X perpendicularis, & *d e* ad B A parallela. Et quoniam quadrata ex *d e*, *b a* [a]ſe habent, ut N Tq ad V Nq, hoc eſt ut D Eq ad quadratum alterius diametri, & ſit *d e* major quàm *b a*, erit D E major altera diametro. *Q.E.D.*

a 16. 3. *Apoll.*

Coroll. I.

Siquidem prolatum ſphæroides plano ſecetur; alia quidem eadem erunt, ſed intercepta in ſphæroide linea (qualis D E) minor erit diameter.

II.

Ex iiſdem quoque patet in omnibus figuris, quòd ſi parallelis planis ſecentur ipſarum ſectiones ſimiles erunt.

Nam quadrata è perpendicularibus L H ad comprehenſa ſub ſegmentis D H, H E rectangula ſemper eaſdem obtinebunt rationes, æquales

æquales scilicet ei, quam habent V Nq ad N Tq.

Coroll. III.

Si fiat T N. N V :: E D. M. erit M altera diameter.

Prop. XVI.

Fig. 136. *In conoide parabolico à quibuscunque punctis* (D) *in superficie conoidis ductis ad axem* (V K) *parallelis* (F D E), *quæ* (B F) *in easdem partes dicuntur, ad quas sunt ejus gibba, cadent extra conoides, quæ verò ad alteras* (D E) *intra.*

a 12 *hujus.* b 26. *I Apol.* c *hyp.*

Nam si per E F & axem V K ducatur planum, [a] faciet parabolam, [b] extra quam D F tota cadet, & D E intra; quia est F E ad V K parallela.

Prop. XVII.

Fig. 137. *In conoide hyperbolico, à quibuscunque punctis* (D) *in ejus superficie, ductis rectis* (F D E) *parallelis alicui rectæ* (C G) *quæ est in conoide, ducta per coni conoides complectentis verticem* (C), *quæ* (D F) *ad easdem partes dicuntur, ad quas sunt ipsius gibba, cadent extra conoides, quæ* (D E) *ad alteras, intra.*

a 12 *hujus. B.* b 47. *I Apol.*

Nam si per C G, & D E ducatur planum [a] fiet hyperbola, cujus centrum C, [b] ergo ducta C D H, & C G erunt diametri; quapropter D E his intercidens tota ad partes E intra, versùs F verò extra sectionem cadet.

Prop. XVIII.

Fig. 138. *Si figuras conoides tangat planum* (D T) *non secans conoides, in uno tantùm puncto tanget; & per tactum* (D) *& axem* (V K) *ductum planum* (D V K) *rectum erit tangenti plano* (D T).

a 8 *def.* 11. b 12 *hujus.* c 10. *I Apol.* d 7. 11. e 12 *hujus.* f *priùs.* g 18. 3.

Si fieri potest, tangat planum D T etiam in Y, & per puncta D Y ducantur rectæ D E, Y Z axi parallelæ; itaque ductum per has planum aut per axem transit, aut [a] ei parallelum est; inque conoidis superficie sectionem [b] efficit coni, [c] quam recta D Y secat; cùm igitur D Y [d] sit in plano D T, hoc secabit conoides, adversùs hypothesin.

Porro ducatur D N axi perdendicularis; [e] hæc diameter erit circuli ad planum D V K recti, cujus cum tangenti plano communis sectio sit recta D T; hæc igitur circulum tanget ([f] nec enim secat) [g] unde

de D T ad D N perpendicularis erit, & proinde [h]recta plano D V K. [h] 4 *def.* 11.
ergo planum quodque per D T, adeóque planum tangens [k]rectum [k] 18. 11.
erit plano D V K. *Q. E. D.*

Coroll. Quævis in plano tangenti recta conoidi occurrens tangit conoides; & quamlibet in conoidis ſuperficie factam ſectionem. Nam ſi recta conoides ipſum, aut in ejus ſuperficie factam ſectionem aliquam ſecaret, planum (contra hypotheſin) ſecaret conoides.

Prop. XIX.

Si ſphæroidon figurarum quamlibet tangat planum, figuram non ſecans, in uno ſolùm puncto tanget; quodque per tactum, & axem ducitur planum, tangenti plano rectum erit.

Prorſus eodem modo demonſtratur quo præcedens.

Prop. XX.

*Si (*conoideon aut) ſphæroideon figurarum quælibet ſecetur plano per axem* (V X) *& ſectionem contingens ducatur recta quædam* (D T), *& per tangentem erigatur planum plano ſecanti rectum, continget figuram in eodem puncto* (D), *in quo & recta* (D T) *coni ſectionem tangit.* Fig. 139.

* Ita puto ſcripſiſſe Archimedem.

Nam ſi fieri poteſt alibi tangat dictum per D T planum, puta in G; & à G ducatur G E recta plano D V X; [a]cadet hæc in ipſam D T; [b]unde punctum E [c]erit intra coni ſectionem, contra hypotheſin.

[a] 38. 11.
[b] 38. 11.
[c] 12. *huj.* D.

Prop. XXI.

Si figurarum ſphæroidon aliquam duo plana parallela (R T, B S) *contingant, contactus jungens* (B A) *per ſphæroidis centrum* (C) *tranſibit.* Fig. 140.

Planum per B, & axem V X plano tangenti B S [a]rectum eſt; [b]adeóque plano A T. planum per A, & axem tangenti plano A T [b]rectum eſt; [c]ergo plana B V X, A V X aut parallela ſunt, aut coincidunt; [e]non illud, ergo hoc. Igitur communes plani B V A X cum tangentibus planis ſectiones B S, A T [d]parallelæ ſunt; & [e]tangunt ellipſim B V A X, [f]ergo recta B A per centrum tranſit. *Q. E. D.*

[a] 19 *huj.*
[b] *ſch.* 14. 11.
[c] 8. *def.* 11.
[d] 16. 11.
[e] *hyp & cor.* 18 *hujus.*
[f] *conv.* 27. 2 *Apol.*

Prop.

Prop. XXII.

Fig. 141. *Si figurarum ſphæroidum quamcunque contingentia dicantur duo parallela plana* (B S, A T) *ducatur autem per ſphæroideos centrum* (C) *planum aliquod* (D E) *tangentibus parallelum; quæ per effectam ſectionem ducuntur tactus conjungenti* (B A) *parallelæ* (D M) *extra ſphæroides cadent.*

Sumatur in ſectione punctum quodvis D, & per B A ac D ducatur planum, cujus cum parallelis planis communes ſectiones ſint rectæ S R, D E, T X. hæ igitur [a]parallelæ ſunt, & D E per centrum tranſit, quia centrum eſt tam in [b]recta B A, quàm in [c]plano per D E) & ſectio B D A E eſt [d]ellipſis (aut fortè circulus) & B S, A T hanc ſectionem [e]tangunt, adeóque B A, D E ſunt [f] diametri [g]conjugatæ. [h]ergo quæ per D ducitur ad B A parallela (D M) tangit ſectionem B D A E adeóque ſphæroides ipſum. *Q.E.D.*

a 16. 11.
b 21 *hujus.*
c *hyp.*
d 12. *hujus. C.*
e *cor.* 18. *huj.*
f *conv.* 27. 2 *Apol.*
g 47. 1 *Apol.*
h 32. 1 *Apol.*

Prop. XXIII.

Fig. 142. *Omnis figura ſphæroides* (V D X E) *ſecta plano* (D E) *per centrum* (C) *bipertitur a plano, cùm ipſa, tum ſuperficies ejus.*

Operam ludat, opinor, qui rei tam claræ lucem conetur addere. Sanè ſi (ducto per axem V X plano ad planum D E recto) ſemi-ellipſes D V E, D X E ſimiles ſint & æquales, quidni eodem modo portiones ſphæroides D V E, D X E æquentur & aſſimilentur penitus? ſibi congruent utique: plura tædet.

Prop. XXIV.

Fig. 143. *Datâ cujuſcunque conoidis portione* (B V A) *reſectâ plano* (B O A) *recto ad axem* (V K) (*vel cujuſlibet ſphæroidis non majoris dimidio ſphæroide portione ſimiliter abſciſſâ*) *poſſibile eſt figuram ſolidam inſcribere, & aliam circumſcribere, è cylindris æquè altis* *compoſitam, ita ut figura circumſcripta ſuperet inſcriptam minori quàm propoſitâ quâcunque ſolidâ magnitudine* (Z).

* lego χᾶμα pro τμᾶμα.
* lego ἐχόντων συγκειμένων, pro ἐχόντων τῶν συγκειμένων.

a 12 *hujus.* Secetur conoides plano per axem ad planum B O A recto, [a]faciente coni ſectionem B V A; & ſuper circulum B O A conſtituatur cylindrus B P Q A, habens eundem cum conoide axem V K; qui quidem

dem, *æquisecto axe in punctis N,M,L, [b]sic dividatur ut sit cylindrus B X X A, altitudine K L, minor dato solido Z. Per divisionum verò puncta L, M, N ducantur rectæ X S ad B A parallelæ, sectioni occurrentes punctis B, A; per quæ ducantur rectæ *l* λ, *m* μ, *n* ν ad V K parallelæ. Jam circa axem V K circumvolutâ figurâ B ϰ λ μ ν ν μ λ ϰ A liquet [c]effici figuram conoidi circumscriptam, constantem è cylindris B ϰ, B λ, B μ, B ν æquè altis (nam rectæ ϰ B, λ B, μ B &c [d]cadunt extra conoides; & rectæ B A sunt [a] diametri circulorum parallelorum ipsi B O A; & altiuditnes K L, L M &c [e] æquantur). Item circumductâ figurâ *l m n* B A *n m l*, patet inscriptam esse conoidi figuram, itidem è cylindris æquè altis compositam; (nam rectæ *l* B, *m* B, *n* B intra sectionem jacent &c) quia verò cylindrus B *l* [f] æquatur cylindro B λ, & cylindrus B *m* cylindro B μ, & [f] cylindrus B *n* cylindro B ν; liquet circumscriptam excedere inscriptam cylindro B ϰ, hoc est minore quàm solido Z. *Q.E.F.*

[b] 1. 10. & 11 12. * [c] 21. *def.* 11. [d] 16, 17, 22 *b.* [e] *const.* [f] 11. 12.

Coroll. Cylindrus B ϰ est excessus figuræ circumscriptæ supra inscriptam.

Prop. XXV.

Datâ conoidis cujuscunque portione (B O A) *resectâ plano* (B O A) *non rectâ ad axem* (*vel sphæroidis cujuslibet non majoris dimidio sphæroide similiter resectâ*) *potest ipsi figura solida inscribi, aliáque circumscribi, ita ut figura circumscripta inscriptam excedat minori, quàm propositâ quacunque magnitudine solidâ* (Z). Fig. 143.

Secetur conoides plano per axem ad planum B O A recto; [a] ita ut fiat coni sectio B V A, cujus communis cum plano B O A sectio B R [c]erit diameter ellipsis B O A. sectionem verò B V A [c]tangat recta R Q ad B A parallela in V; à quo [d]ducatur sectionis diameter V K. Super ellipse verò B O A [e] constituatur segmentum cylindricum B P Q A, habens axem K V: æquisecetur autem V K in punctis L, M, N, ita ut ducto per L plano ad B O A parallelo, [f] sit segmentum cylindricum B ϰ ϰ A minus dato solido Z. Per dicta porro divisionum puncta ducantur rectæ X S ad B A parallelæ, sectioni occurrentes punctis B, A; unde ductis per B A planis ad ipsum B O A parallelis (hoc est rectis plano B V A) [b]fient ellipses, quarum diametri BA; ad quas utrinque [c] constituantur cylindrica segmenta B *l*, B λ; B *m*, B μ &c. quorum axes K L, L M, M N &c æquales inter se. Factum constat, ut in præcedente; quid plura?

a 12. *hujus.* b 13, 14, 15 *b.* c *sch* 13. 2 *Ap.* d 10. 1. e 10 *hujus.* f 1. 10.

His præmissis, * demonstremus quæ de figuris proposita sunt. *(*Subjicit Archimedes*)

Hactenus nempe propositiones lemmaticas præstravit, jam principales aggreditur, quibus istæ deserviunt.

Prop. XXVI.

Fig. 143. *Quæcunque portio* (B V A) *conoidis parabolici resecti plano* (B O A) *recto ad axem* (V K) *sesquialtera est coni* (B V A) *basin habentis eandem portioni, & axem.*

Si fieri potest, sit primò port B V A ⊏ $\frac{3}{2}$ con B V A. Portioni circumscribatur figura (quæ vocetur φ) & inscribatur altera (quæ dicatur ψ) utraque constans cylindrulis, juxta 24 hujus, ita ut φ — ψ ⊐ port A B C — $\frac{3}{2}$ con A B C; unde cùm [a] sit φ ⊏ port A B C, erit ψ ⊏ $\frac{3}{2}$ con A B C [b] = cyl $\frac{BPQA}{2}$. Sunt autem figuræ circumscriptæ cylindri [c] (æquè scilicet alti) B κ, B λ, B μ, B ν ad se ordine [d] ut suæ bases [e] hoc est ut quadrata radiorum B K, B L, B M, B N, [f] hoc est ut axes V K, V L, V M, V N, [e] hoc est juxta hypothesin primæ hujus. ergo cum cylindrus B P Q A [c] æquetur totidem æqualibus horum maximo B κ; & figura ψ [g] ipsis his omnibus, dempto maximo B κ; [h] erit cyl $\frac{BPQA}{2}$ ⊏ ψ. sed priùs erat ψ ⊏ cyl $\frac{BPQA}{2}$: quæ repugnant.

a 9. *ax.* 1.
b 10. 12.
c *const.*
d 11. 12.
e 2. 12.
f 20. *I Apol*
g *cor.* 24 *huj.*
h 1 *huj.*

Sin verò dicatur esse $\frac{3}{2}$ con B V A ⊏ port B V A; [k] sit jam φ — ψ ⊐ $\frac{3}{2}$ con B V A — port B V A; adeóque cùm sit port B V A [l] ⊏ ψ, * erit φ ⊐ $\frac{3}{2}$ con B V A, [m] hoc est φ ⊐ cyl $\frac{BMNA}{2}$, [n] quod est absurdum.

k 24 *hujus.*
l 9. *ax.* 1.
m 10. 12.
n 1 *hujus.*

Ergo potiùs est portio B V A = $\frac{3}{2}$ con B V A. *Q.E.D.*

Archimedes adhibet secundam hujus, hoc fermè pacto. Quoniam est cyl B | B κ. L A [o] :: (B Kq B Lq [p] ::) V K. V L. & cyl X S. *m* A | XS [o] :: (B Kq. B Mq [p] ::) V K. V M. & simili modo cyl X S. *n* A :: V K. V N; & sunt cylindri X S [q] æquales inter se, [r] adeóque proportionales totidem æqualibus ipsi V K, [s] ergo erit illorum summa (hoc est cylindrus B φ Q A) ad omnes *l* A, *m* A, *n* A, ut totidem V X ad V L + V M + V N; [t] hoc est in majori ratione quàm 2 ad 1 *&c.* Res eodem recidit, at noster modus simplicior videtur, & clarior; qualem proinde nos in sequentibus haud verebimur usurpare. *Cor.*

o 11. & 2. 12.
p 20. *I Apol.*
q 11. 12.
r 7. 5.
s 2 *hujus.*
t 1 *hujus.*

Cylindri.	*Rectæ.*
XS. XS. XS. XS.	VK. VK VK. VK.
l A. *m* A. *n* A.	VL. VM. VN.

Cor. Conoidis parabolici portio dimidia eſt cylindri ad æqualem baſin & æquè alti.

Cor. 2. Hinc datâ parabolici conoidis portione rectò abſciſſâ, facilè reperitur æqualis ei conus, aut cylindrus, Fig 144.

Si protrahatur axis K V ad D, ut ſit D V = ½ K V. erit conus B D A = ½ con B V A = port B V A.

Schol.

Indiviſibilium methodo facilè deducitur hæc propoſitio. Sit enim V N = *a*, U K = A; parameter *r*, vel R. eſtque

B Nq = *ra*
B Mq = 2*ra*
B Lq = 3*ra*
B Kq = RA

} [a] Summa eſt $\frac{RAA}{2}$ ergo ſumma circulorum B A eſt [a] *ſch. 1 huj.*

[ϖ] $\frac{RAA}{2\delta}$. *Conus B V A eſt [ϖ] $\frac{RAA}{3\delta}$. ergo. $\frac{BKq \times VK}{3}$ * *hoc eſt*

Prop. XXVII.

Quinetiam ſi plano (B O A) *non rectò ad axem à concide parabolico reſecetur portio* (B V A), *ſimiliter ſeſquialtera eſt ſegmenti coni* (B V A) *baſin habentis eandem cum portione, & axem eundem.* Fig. 145.

Si fieri poteſt, ſit port B O A ⊏ ½ ſegm B V A, portioni circumſcribantur & inſcribantur figuræ (qnæ dicuntur φ ↓) conſtantes ſegmentis cylindricis, juxta 25 hujus, ita ſcilicet ut φ − ↓ ⊐ port B V A − ſegm B V A. unde erit ↓ ⊏ ½ ſeg B V A. Sunt autem ſegmenta cylindrica B κ, B λ, B μ, B ν, [a] ut baſes ſuæ ellipticæ, [b] hoc eſt ut B Kq, B Lq, B Mq, B Nq, [c] hoc eſt ut axes B K, B L, B M, B N, [d] hoc eſt rurſus juxta hypotheſin primæ hujus; [e] quare ſegm $\frac{BPQA}{2}$ ⊏ ↓, [f] hoc eſt ½ ſegmenti conici B V A ⊏ ↓;

a *ſch.* 11 *huj.* b *cor.* 7. *huj.* c 20. 1 *Apol.* d *conſtr.* e 1 *hujus.* f 11 *hujus.*

quod oſtenſis repugnat: Sin dicatur port B V A ⊐ ½ ſegm B V A, itidem conſequetur abſurda contradictio, ſicut in præcedenti. Ergo potiùs eſt port B V A ſeſquialtera ſegmenti conici B V A. *Q. E. D.*

Hinc quoque facilè reperiatur ſegmentum conicum aut cylindricum (vel etiam conus, & cylindrus) æquale ejuſmodi portioni.

Prop. XXVIII.

Fig. 145.

Si conoidis parabolici duæ portiones (B V A, S D G) *resecentur planis, altera quidem* (B V A) *recto ad axem, altera verò* (S D G) *obliquo, sint verò portionum axes* (V K, D E) *æquales; portiones erunt æquales.*

Secetur conis plano per axem ad planum S G recto, [a] faciente sectiones B V A, S D G; quarum diametri V K, D E; connectantur autem V B, V A, & D S, D E; & ducantur G L ad D E (protractum) & D P ad S G perpendicularis. & propter D E [b] = V K, [c] est G L = A K. [d] unde G E. G L) ([e] hoc est D E, D P, [d] vel V K, D P) :: G E. A K [f] :: G E × A K. A Kq. [g] Sunt verò G E, & G L, vel A K semiaxes ellipsis, quæ basis est portionis S D G; [h] adeóque G E × A K ad A Kq, ut hæc ellipsis ad circulum radio A K. ergo ut altitudo V K ad altitudinem D P, [k] ita est reciprocè basis segmenti conici S D G ad conum B V A. [l] ergo conus B V A segmento conico S D G æquatur, [m] & ideo portio B V A portioni S D G. *Q.E.D.*

a 12 *hujus. A.*
b *hyp.*
c *cor* 4. *hujus.*
d 7. 5.
e 4. 6.
f 1. 6.
g 13 *hujus.*
h 6 *hujus.*
k 11. 5.
l *Sch.* 11 *huj.*
m 26 & 27 *b.* & 15. 5.

Prop. XXIX.

Fig. 146.

Si conoidis Parabolici duæ portiones resecentur planis, quomodocunque ductis, portiones ad se mutuò rationem habebunt eandem, quàm quadrata axium suorum.

Per axem conoidis ducatur planum, quod efficiat sectionem; in cujus axe sumantur à vertice rectæ V K, V Z datarum portionum axibus æquales, & ducantur B A, X Y ad V K perpendiculares: [a] sunt igitur portiones B V A, X V Y æquales datis; hæ verò se habent invicem [b] ut coni B V A, X V Y, [c] hoc est in composita ratione basium & altitudinum, hoc est in ratione composita ex rationibus [d] B Kq ad X Zq, & V K ad V Z; [e] hoc est composita ex rationibus V K ad V Z, & V K ad V Z; hoc est, [f] ut V Kq ad V Z q, [g] hoc est ut quadrata axium datarum portionum. *Q.E.D.*

a 28 *hujus.*
b 15. 5. & 26 27 *hujus.*
c *Schol* 15. 12.
d 2. 12.
e 21. *I Apol.*
f 23. 6.
g *consq.* & 7. 5.

Prop. XXX.

Fig. 147.

Omnis hyperbolici conoidis portio (B V A) *resecta plano* (B O A) *recto ad axem, ad conum* (B V A) *habentem basim eandem cum portione, & æqualem altitudinem, hanc habet rationem, quam habet æqualis* (K Y) *& axi* (V K) *portionis, & triplæ* (V Y) *axi accedentis* (V C)

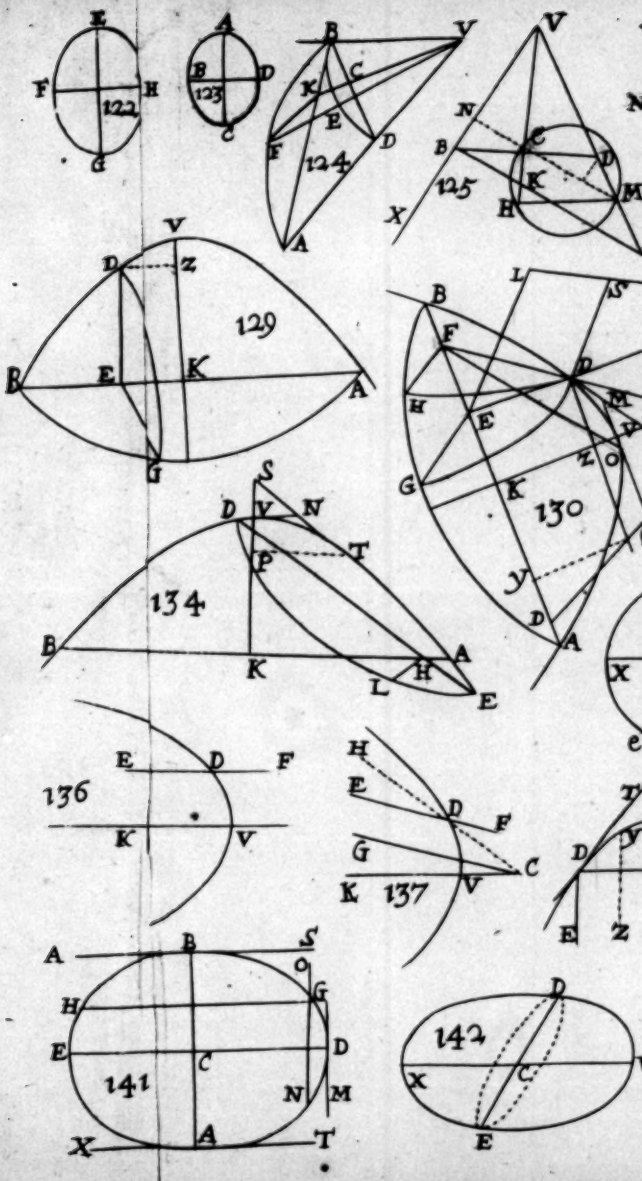
24 *hujus.*

11. 12.
2. 12.
21. *I Apol.*
1. 6.
onſt.
2 *hujus.*

3 *hujus.*
15. 5.
onſt.
conſt. & cor.
). 5.
10. 12.
0
10. 5.
24 *hujus.*
3 *hujus.*
vius.

10. 5.

Fig. 148.


122
123
124
125
129
130
134
136
137
141
142

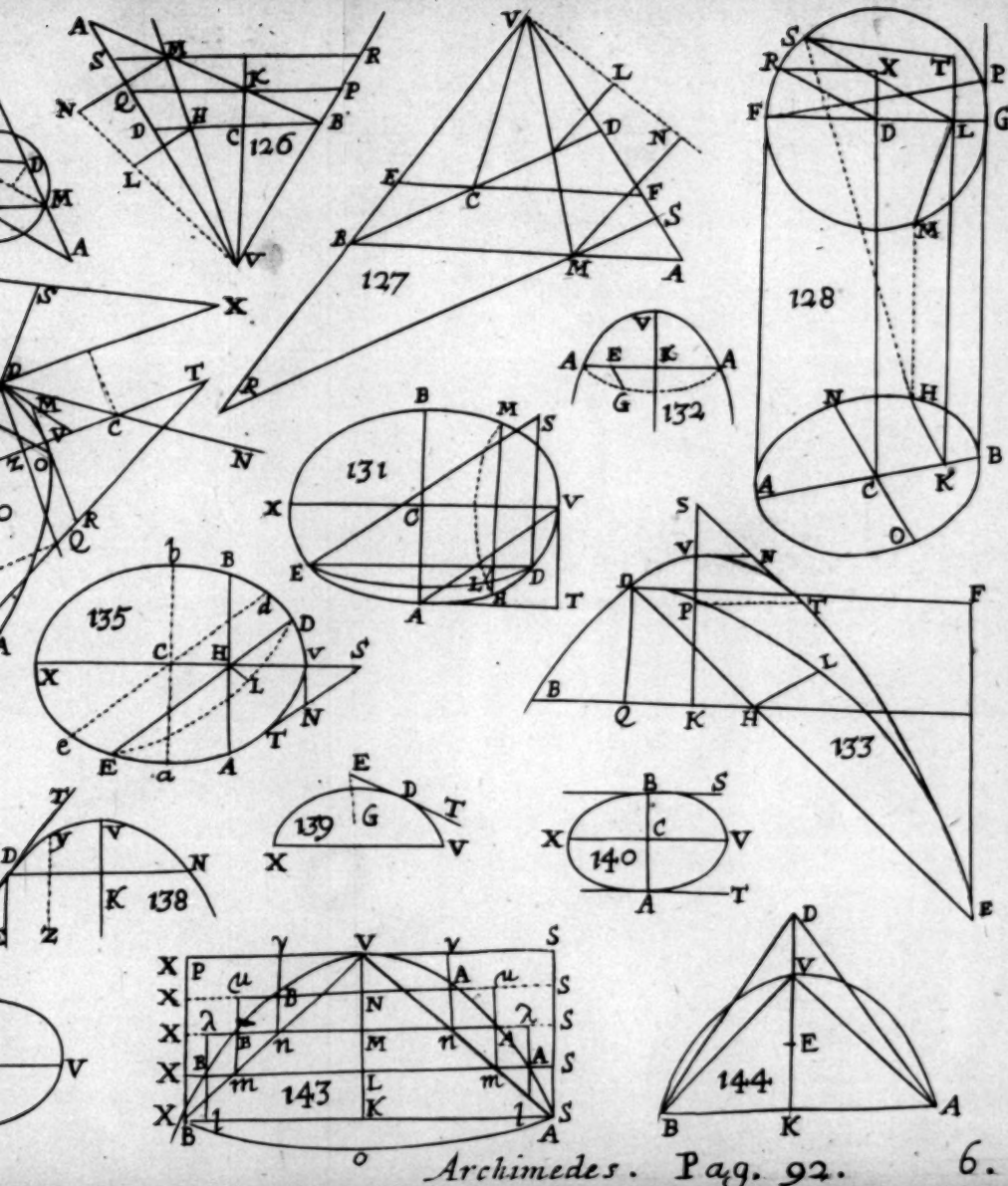
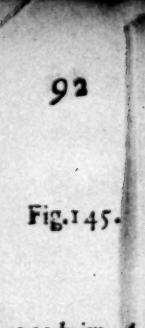
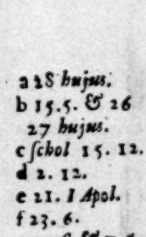

126
127
128
131
132
133
135
138
139
140
143
144

Fig. 145.



a 12 *hujus*. *A*.
b *hyp*.
c *cor* 4. *hujus*.
d 7. 5.
e 4. 6.
f 1. 6.
g 13 *hujus*.
h 6 *hujus*.
k 11. 5.
l *sch*. 11 *huj*.
m 26 & 27 *h*.
& 15. 5.

Fig. 146.



a 28 *hujus*.
b 15. 5. & 26
27 *hujus*.
c *schol* 15. 12.
d 2. 12.
e 21. *1 Apol*.
f 23. 6.
g *conſt*. & 7. 5.

Fig. 147.

(V C) *ad æqualem* (X T) *utrique & axi portionis, & duplæ* (V T) *accedentis axi.*

Sit aliquod Z. con B V A :: K Y. K T ; & ſi fieri poteſt ſit primò Z ⊐ port B V A. [a]Portioni circumſcribantur & inſcribantur figuræ (quæ dicantur φ, & ↓) utraque conſtans cylindris, juxta 24 hujus, ita ut ſit φ — ↓ ⊐ port B V A — Z ; *adeóque Z ⊐ ↓ ; ſunt autem cylindri Bϰ, Bλ, Bμ, Bν ad ſe, [b]ut baſes, [c]hoc eſt ut B Kq, B Lq, B Mq, B Nq, [d] hoc eſt ut rectangula T K V, T L V, T M V, T N V, ([e]hoc eſt ut T V + V K × V K ; T V + V L × V L, T V + V M × V M, T V + V N × V N) [f] hoc eſt juxta hypotheſin tertiæ hujus ; ergo [g]cylindrus B Q (æqualis ſummæ maximorum Bϰ) ad figuram inſcriptam ↓ (æqualem ſummæ æqualium cylindrorum dempto maximo) ſe habet, ut rectangnla totidem æqualia maximo T K V ad inæqualia rectangula T L V, T M V, T N V, [h]hoc eſt in majore ratione quàm K T ad $\frac{1}{3}$ K V + $\frac{1}{2}$ V T, hoc eſt in majore ratione quàm cylindrus B Q ad Z (nam eſt $\frac{K T}{3}$. $\frac{K V}{3}$ + V C [k] :: (K T. K V + 3 V C [l] :: K T. K Y [m] :: con B V A. Z [n] ::) cyl $\frac{B Q}{3}$. Z ; [o] adeóque K T. $\frac{K V}{3}$. + V C :: cyl B Q. Z) [p] ergo ↓ ⊐ Z ; quod repugnat priùs oſtenſis. Sin dicatur Z ⊏ port B V A ; [q]fiat φ — ↓ ⊐ Z — port B V A, *adeóque φ ⊐ Z ; & quia cyl B Q. φ [r] ⊐ K T. $\frac{1}{3}$ K V + $\frac{1}{2}$ V T [s] :: cyl B Q. Z ; [t]erit φ ⊏ Z quod itidem repugnat. ergo potiùs eſt Z = port B V A. *Q.E.D.*

a 24 *hujus.*
b 11. 12.
c 2. 12.
d 21. *I Apol.*
e 1. 6.
f *conſt.*
g 2 *hujus.*
h 3 *hujm.*
k 15. 5.
l *conſt.*
m *conſt. & cor.* 4. 5.
n 10. 12.
* o
p 10. 5.
q 24 *hujus.*
r 3 *hujus.*
s *priùs.*
t 10. 5.

Schol.

Hinc facilè reperitur conus æqualis datæ hyperbolici conoidis portioni (B V A).

Fiat K V + 2 V C. K V + 3 V C :: K V. K D. Eſtque con B D A. con B V A :: K D. K V :: K V + 3 V C. K V + 2 V C :: port B V A. con B V A. unde con B D A = port B V A. Fig. 148.

Schol.

Indiviſibilium methodo faciliùs tranſigitur hoc negotium.

Sint

Sint $VN = a$. $VK = A$. est

α 12. I Apoll.

$$BNq^{\alpha} = ra + \frac{r}{t}aa$$

$$BMq^{\alpha} = 2ra + \frac{r}{t}aa$$

$$BLq^{\alpha} = 3ra + \frac{r}{t}9aa$$

$$BKq^{\alpha} = RA + \frac{R}{T}Aq.$$

ζ schol. 1 huj.
γ sch. 10. de helic.

Summa $^{\zeta}\frac{RAA}{2} + {}^{\gamma}\frac{R}{T}\frac{AAA}{3}$

*hoc est $\frac{\pi}{\delta}$

Ergo summa circulorum BA, est $\frac{\pi}{\delta}\times:\frac{RAA}{2} + \frac{R}{T}\frac{A^3}{3}$. At conus

×: BKq×VK.
δ 10. 12.
ζ 15. 5.

BVA δ est $^{*}\frac{\pi}{\delta}\times:\frac{RAA}{3} + \frac{R}{T}\frac{AAA}{3}$. Horum verò ζ eadem est ratio quæ $\frac{3T}{2} + A$ ad $T + A$ (quod patet istas summas multiplicando per 3T & dividendo per RAA). Et hoc, opinor, modo *Archimedes* hanc proportionem adinvenit.

Prop. XXXI.

Quinimò si non recto ad axem plano resecetur portio hyperbolici conoidis, ad segmentum coni, basin habentis eandem cum portione, eundemque axem hanc habebit rationem, quam æqualis utrique, axi nempe portionis cum tripla accedentis axi, ad æqualem ambabus, axi nempe & duplæ accedentis axi.

Probatur ut antecedens, nisi quòd pro circulis hîc ellipses habeantur. Confer Propos. 27.

Prop. XXXII.

Fig. 149. *Omnis figuræ sphæroideos plano resectæ per centrum* (K) *recto ad axem* (VT) *dimidium* (BVA) *duplum est coni* BVA) *basin habentis eandem cum portione, & eundem axem.*

a 24 hujus.
b ut in priorib.

Si fieri potest sit 2 con BVA ⊐ port BVA; portioni [a]circumscribantur & inscribantur figuræ (quas pro more voco φ & ψ) ita ut sit φ — ψ ⊐ port BVA — 2 con BVA; [b]ac ideo 2 con BVA ⊐ Ψ.

Sunt

Sunt autem cylindri Bκ, Bλ, Bμ, Bν ad ſe [c] ut BKq, BLq, BMq, BNq, [d] hoc eſt ut rectangula TKV, TLV, TMV, TNV, [e] hoc eſt ut VKq, VKq—KLq, VKq—KNq, VKq—KNq; ergo cylindrus BQ [b] (æqualis ſummæ cylindricorum æqualium maximo Bκ) ad figuram ↓ [b] (æqualem ſummæ inæqualium dempto maximo) [c] ſe habet ut totidem VKq, ad reliqua VKq—VLq, VKq—VMq, VKq—VNq, [g] hoc eſt in majori ratione quam tot VKq ad VKq, VKq—VLq, VKq—VMq, VKq—VNq, [g] hoc eſt in majori ratione quàm tot VKq ad tot VKq—$\frac{1}{3}$VKq (quia $\frac{\text{tot VKq}}{3}$ [h] ⊏ VLq + VMq + VNq) hoc eſt quàm tot VKq ad tot $\frac{2}{3}$VKq, hoc eſt quàm 3 ad 2, [k] hoc eſt quàm cylindrus BQ ad duplum coni BVA. [l] unde fig ↓ ⊐ 2 con BVA. verum erat 2con BVA ⊐ ↓, quæ repugnant.

c 11. 12.
d 21. *I Apol.*
e 5. 2.
f 2 *hujus.*
g 8. 10.
h 2 *cor.* 10 *de helic.*
k 10. 12.
l 10. 5.

Quod ſi dicatur 2con BVA ⊏ por BVA; [m] fiat φ—↓ ⊐ 2con BVA—port BVA; adeóque φ ⊐ 2 con BVA. verum contra, priorem diſcurſum invertendo, [n] patet eſſe 2con BVA ad cylindrum BQ in minori ratione quàm VKq, VKq—VLq, VKq—VMq, VKq—VNq ad tot VKq, [o] hoc eſt quàm figura φ ad cylindrum BQ, [p] adeóque eſſe 2con BVA ⊐ φ, quod repugnat. Quin potiùs ergo eſt port BVA = 2con BVA. *Q.E.D.*

m 24 *hujus.*
n 26. 5.
o *priùs, & 2 h.*
p 10. 5.

Per indiviſibilia: ſit VN = *a*, VK = A.

$$BNq^{\alpha} = ra - \frac{r}{t}aa.$$

$$BMq^{\alpha} = 2ra - \frac{r}{t}4aa.$$

$$BLq^{\alpha} = 3ra - \frac{r}{t}9aa.$$

$$BKq^{\alpha} = RA - \frac{R}{T}AA.$$

α 13. *I Apol.*

[ζ] Summa eſt $\frac{RAA}{2} \gamma \frac{R}{T} \frac{AAA}{3}$. & ſumma circulorum BA eſt $\frac{\pi}{\delta}$: $\frac{RAA}{2} - \frac{R}{T}\frac{A^3}{3}$. At verò conus BVA [δ] eſt $\frac{\pi}{\delta}$: $\frac{R^2A}{3} - \frac{R}{T}\frac{A^3}{3}\delta$ (quia BKq [ζ] = RA + $\frac{R}{T}$AA). ergo cùm iſta ſumma [θ] ſit ad hanc ut $\frac{3F}{2}$ — A ad T—A (ut patet utramque ducendo in T, & dividendo per RAA)

ζ 1 *hujus.*
γ *ſch.* 10. *helic.*
δ 10. 11.
ζ 12. 1 *Apol.*
θ 15. 5.

RAA) hoc est in præsente casu ut 2 ad 1) λ quia $\frac{T}{2} = A$) μ erit portio B V A ad conum B V A, ut 2 ad 1.

λ *hyp.* μ 11. 5.

Prop. XXXIII.

Quinetiam si sphæroides plano non recto ad axem per centrum secetur, similiter dimidium sphæroidis duplum erit segmenti coni basin habentis eandem cum portione, eundemque axem.

Non abludit demonstratio ab illa præcedentis: confer propos. 27 & 31.

Prop. XXXIV.

Fig. 149. *Omnis figuræ sphæroidis* (B V A T) *plano secta recto ad axem* (VT) *non per centrum* (C) *portio minor ad conum* (B V A) *basin habenti eandem cum portione, & axem eundem* (V K) *hanc habet rationem, quàm utraque* (V C + K T) *& semissis axis sphæroidis, & axis majoris portionis ad axem* (T K) *majoris portionis.*

Vides in præcedente secundùm indivisibilia processu, qui generalis est, & ad quaslibet portiones (etiam hemisphæroide majores) æquè spectat, esse portionem B V A ad conum B V A, ut $\frac{3T}{2} - A$ ad T-A, hoc est ut V C + K T ad K T. *Q.E.D.*

Sin *Archimedis* strictiorem discursum aves cognoscere; sit aliquod Z. con B V A :: V C + K T. K T. & si fieri potest, sit primò port B V A ⊏ Z. Portioni verò B V A [d] rursus circumscribantur figuræ φ, Ψ, ita ut φ − Ψ ⊐ port B V A − Z; ac [b] inde Z ⊐ ↓. Sunt verò cylindri B ϰ, B λ, B μ, B ν ad se [e] ut rectangula BKV, B L V, B M V, B N V; adeóque cylindrus B Q ad inscriptam figuram Ψ, [f] ut tot rectangula T K V ad rectangula T L V, T M V, T N V.

d 24 *hujus.* e *ut in præced.* f 2 *hujus.*

Est verò
$$\begin{cases} TK * KV^* = TL * LV + 2CK * KL + KLq. \\ TK * KV^* = TM * MV + 2CK * KM + KMq. \\ TK * KV^* = TN * NV + 2CK * KN + KNq. \\ TK * KV^* = TK * KV = 2CK * KV + KVq. \end{cases}$$

*Nam excessus rectangulorum T K V, T L V [g] est C Lq − CKq [h] = C Kq + 2 C K * K L + K Lq − CKq = 2 CK + KL + KLq. &c.

g 5. 2. h 4. 2.

Se

e verò habet summa juxta 3am hujus; leóq; tot æqualia maximo 2CK × KV KVq ad omnia inæqualia se habent minori ratione, quàm 2CK + KV ad K + ⅓ KV; hoc est quàm KT ad CK + ⅓ KV. [l]ergo per conversionem rationis tot æqualia maximo sunt ad seipsa demptis his inæqualibus (hoc est omnia rectangula TKV ad ipsa TLV, TMV, NV) in majori ratione, quàm KT ad KT dempto CK + hoc est quàm KT ad CV — $\frac{KV}{3}$. [m]ergo cyl BQ Ψ ⊏ KT.CV — . Est verò cyl BQ.Z [n]:: 3 con BVA. Z [o]:: 3KT.VC + KT T.VC + $\frac{KV}{3}$ (nam VC + KT = 3VC — VK). [m]ergo Ψ Z, contrà quàm priùs evictum est.

2CK × KL + KLq.
2CK × KM + KMq.
2CK × KN + KNq.
2CK × KV + KVq.
k 3 *hujus.*
l 26. 5.
m 10. 5.
n 10. 12.
o *hyp.*

Quòd si dicatur esse Z ⊏ port BVA, fiat φ — Ψ [p] ⊐ Z — port VA, ac ideo φ ⊐ Z. Jam (ostensis insistendo) est cyl BQ ad fi-am circumscriptam φ, [q]ut tot rectangula TKV (quot sunt cylin-Bu in BQ) ad rectangula TKV, TLV, TMV, TNV. verùm rectangula TKV ([r]hoc est tot 2CK × KV + KVq) ad summam CK × KL + KLq, CK × KM + KMq, CK × KN + KNq se habent in majori ratione quàm 2CK + KV ([r]vel KT) ad CK + ⅓ KV. & ideo dicta rectangula TKV ad seipsa demptâ summâ ([r]hoc est ad rectangula TKV, TLV, TMV, TNV) minori ratione erunt quàm KT ad CV — $\frac{KV}{3}$, [r] hoc est quàm cyl Q ad Z. [u]quare cyl BQ. φ ⊐ cyl BQ.Z. quare φ ⊏ Z. quod um repugnat. ergo potiùs est Z = port BVA. *Q.E.D.*

p 24 *hujus.*
q *ut in præc.*
r *priùs.*
s 3 *hujus.*
t 26. 5.
u 10. 5.

Prop. XXXV.

Quinetiam si sphæroides plano non recto ad axem secetur, neque per trum, minor ejus portio ad segmentum coni basin habentis eandem portione axemque eundem hanc rationem habebit, quam simul ul-que & dimidia ejus, quæ connectit vertices factarum portionum, & s majoris portionis ad axem majoris portionis.

Rursus est port BVA ad conum BVA, ut VC + KT ad KT. ili modo demonstratur, ut præcedens, adhibendo ellipses pro cir-s, ut in 27 hujus; quare tædio parcimus.

RAA) hoc est in præsente casu ut 2 ad 1) [a] quia $\frac{T}{2} = A$) [μ] erit portio B V A ad conum B V A, ut 2 ad 1.

[a] *hyp.* [μ] 11. 5.

Prop. XXXIII.

Quinetiam si sphæroides plano non recto ad axem per centrum secetur, similiter dimidium sphæroidis duplum erit segmenti coni basin habentis eandem cum portione, eundemque axem.

Non abludit demonstratio ab illa præcedentis: confer propo 27 & 31.

Prop. XXXIV.

Fig. 149. *Omnis figuræ sphæroidis* (B V A T) *plano sectæ recto ad axem* (V T *non per centrum* (C) *portio minor ad conum* (B V A) *basin habenti eandem cum portione, & axem eundem* (V K) *hanc habet rationem, quàm utraque* (V C + K T) *& semissis axis sphæroidis, & axis majoris portionis ad axem* (T K) *majoris portionis.*

Vides in præcedente secundùm indivisibilia processu, qui generalis est, & ad quaslibet portiones (etiam hemisphæroide majores) æque spectat, esse portionem B V A ad conum B V A, ut $\frac{3T}{2} - A$ ad T-A hoc est ut V C + K T ad K T. *Q.E.D.*

Sin *Archimedis* strictiorem discursum aves cognoscere; sit aliqua Z. con B V A :: V C + K T. K T. & si fieri potest, sit primò μ B V A ⊏ Z. Portioni verò B V A [d] rursus circumscribantur figuræ Ψ, ita ut φ — Ψ ⊐ port B V A — Z; ac [b] inde Z ⊐ ↓. Sunt verò cylindri B κ, B λ, B μ, B ν ad se [e] ut rectangula B K V, B L V, B M V, B N V; adeoque cylindrus B Q ad inscriptam figuram Ψ, [f] ut totus rectangula T K V ad rectangula T L V, T M V, T N V.

[d] 24 *hujus.* [e] *ut in præced.* [f] 2 *hujus.*

$$\text{Est verò} \begin{cases} TK \times KV^* = TL \times LV + 2CK \times KL + KLq. \\ TK \times KV^* = TM \times MV + 2CK \times KM + KMq. \\ TK \times KV^* = TN \times NV + 2CK \times KN + KNq. \\ TK \times KV^* = TK \times KV = 2CK \times KV + KVq. \end{cases}$$

*Nam excessus rectangulorum T K V, T L V [g] est C Lq — CKq

[g] 5. 2. [b] 4. 2.

CKq + 2CK × KL + KLq — CKq = 2CK + KL + KLq

Se verò habet ſumma juxta 3^am^ hujus; $\left\{\begin{matrix}2CK\times KL+KLq.\\2CK\times KM+KMq.\\2CK\times KN+KNq.\end{matrix}\right\}$ [k] 3 *hujus.*
[k]adeóq; tot æqualia maximo $2CK\times KV+KVq$ ad omnia inæqualia ſe habent in minori ratione, quàm $2CK+KV$ ad $\left\{\begin{matrix}2CK\times KV+KVq.\end{matrix}\right\}$
$CK+\frac{1}{3}KV$; hoc eſt quàm KT ad $CK+\frac{1}{3}KV$. [l]ergo per converſionem rationis tot æqualia maximo ſunt ad ſeipſa demptis his inæqualibus (hoc eſt omnia rectangula TKV ad ipſa TLV, TMV, TNV) in majori ratione, quàm KT ad KT dempto $CK+\frac{KV}{3}$; hoc eſt quàm KT ad $CV-\frac{KV}{3}$. [m]ergo cyl BQ $\Upsilon\sqsubset KT.CV-\frac{KV}{3}$. Eſt verò cyl BQ.Z [n]:: 3 con BVA.Z [o]:: $3KT.VC+KT$ [l] 26. 5. [m] 10. 5. [n] 10. 12. [o] *hyp.*

:: $KT.VC+\frac{KV}{3}$ (nam $VC+KT=3VC-VK$). [m]ergo $\Upsilon\sqsupset Z$, contrà quàm priùs evictum eſt.

Quòd ſi dicatur eſſe Z $\sqsubset$ port BVA, fiat $\rho-\Upsilon\sqsupset Z$ — port BVA, ac ideo $\rho\sqsupset Z$. Jam (oſtenſis inſiſtendo) eſt cyl BQ ad figuram circumſcriptam ρ, [q]ut tot rectangula TKV (quot ſunt cylindri B[x] in BQ) ad rectangula TKV, TLV, TMV, TNV. verùm tot rectangula TKV ([r]hoc eſt tot $2CK\times KV+KVq$) ad ſummam $\left\{\begin{matrix}2CK\times KL+KLq\\2CK\times KM+KMq\\2CK\times KN+KNq\end{matrix}\right\}+KV$ ([r]vel KT) ad $CK+\frac{1}{3}KV$. & ideo dicta rectangula TKV ad ſeipſa demptâ hac ſummâ ([r]hoc eſt ad rectangula TKV, TLV, TMV, TNV) [s]in minori ratione erunt quàm KT ad $CV-\frac{KV}{3}$, [r] hoc eſt quàm cyl BQ ad Z. [u]quare cyl BQ.$\rho\sqsupset$ cyl BQ.Z. quare $\rho\sqsubset Z$. quod iterum repugnat. ergo potiùs eſt $Z=$ port BVA. *Q.E.D.* [p] 24 *hujus.* [q] *ut in præc.* [r] *priùs.* [s] 3 *hujus.* [t] 26. 5. [u] 10. 5.

Prop. XXXV.

Quinetiam ſi ſphæroides plano non recto ad axem ſecetur, neque per centrum, minor ejus portio ad ſegmentum coni baſin habentis eandem cum portione axemque eundem hanc rationem habebit, quam ſimul ultraque & dimidia ejus, quæ connectit vertices factarum portionum, & axis majoris portionis ad axem majoris portionis.

Rurſus eſt port BVA ad conum BVA, ut $VC+KT$ ad KT. Simili modo demonſtratur, ut præcedens, adhibendo ellipſes pro circulis, ut in 27 hujus; quare tædio parcimus.

Prop. XXXVI.

Fig. 151. *Cujuſcunque figuræ ſphæroideos* (BVAT) *plano ſecta recto ad axem major portio* (BTA) *ad conum* (BTA) *habentem eandem cum portione baſin, & eundem axem* (TK), *hanc habet rationem, quam aqualis* (GK) *ambabus ſimul & dimidio* (CV) *axis ſphæroidis, & minoris portionis axi* (KV) *habet ad axem* (KV) *minoris portionis.*

Agatur planum DE per centrum; & compleantur coni BVA, DVE: Sint verò TF = TC; & VK.VC :: VC.VX. Eſtque jam con DVE con BVA. [a] = (VC.VK + DCq. BKq = VC. VK + [b] VCq. TK × KV [c] = VX.VC + VCq. TK × KV [c] = VX × VC. VCq + VCq. TK × KV [c] =) VX × VC. TK × KV. item con BVA. port BVA [f] :: TK.KF [d] :: TK × KV. KF × KV. ergò ex æquo eſt con DVE. port BVA :: VX × VC. KF × KV. & antecedentes quadruplando [g] ſphæreis DVE. port BVA :: [h] VX × GF. KF × KV. & dividendo port BTA. port BVA :: VX × GF—KF × KV. KF × KV (hoc [k] eſt) :: VX × GK + KX × KF. KF × KV. (nam eſt VX × GF [l] = VX × GK + VX × KF = VX × GK + [i] KV × KF + KX × KF; adeóque VX × GF—KF × KV = VX × GX + KX × KF). Item eſt port BVA. con BVA [f] :: FK. TK. [l] :: KF × KV. TK × KV; & con BVA. con BTA [m] :: KV. TK :: TK × KV. TKq. ergo rurſus ex æquo eſt port BTA. con BTA :: VX × GK + KX × KF. TKq Quoniam verò eſt VX. VC [n] :: VC. VK :: [o] VX—VC. VC—VK (hoc eſt) :: CX. KC. & componendo VC + VK. VK :: KX. KC; hoc eſt GK. VK ([i] vel VX × GK. VX × VK) :: KX. KC ([i] vel KX × KF. KC × KF). & [p] proinde GK. VK :: VX × GK + KX × KF. VX × VK + KC × KF. eſt verò demùm VX × VK + KC × KF [q] = VCq + KC × KF = VCq + : TK—VC × : TK + VC [r] = VCq + : TKq—VCq = TKq. [s] ergo GK. VK :: (VX × GK + KX × KF. TKq [t] ::) port BTA. con BVA. *Q.E.D.*

a *ſch* 12.
b 21. *I Apol.*
c *conſt.*
d 1. 6.
e 20. *def.* 5.
f 34 *huj.*
g 32 *hujus.*
h *conſtr.* & 1. 6.
k 7. 5.
l 1. 2.
m 11. 12.
n *conſt.*
o 19. 5.
p 12. 5.
q 17. 6.
r *cor.* 5. 2.
s 7. 5.
t *priùs.*

Hujuſce diſcurſus tædium qui voluerit declinare, per generalem propoſ. 34æ diſcurſum ſibi patiatur ſatisfieri.

Prop.

Prop. XXVII.

Quinetiam ſi ſphæroides (B V A T) *ſecetur plano non recto ad axem, neque per centrum, major ejus portio* (B T A) *ad ſegmentum coni baſin habentis eandem cum portione, & eundem axem, hanc habebit rationem, quam utraque ſimul* (K G) *æqualis nempe dimidiæ* (C V) *vertices connectentis factarum portionum, & axi* (K V) *minoris portionis, ad axem minoris portionis.*

Eodem ferè modo demonſtratur quo antecedens, paucúlis, quæ res ipſa ſponte ſuggeret, immutatis.

Coroll.

Ex his facilè reperiatur conus cuilibet datæ ſphæroidis portioni (B V A) æqualis. Fig. 152.

Fiat nempe K T. V C + K T :: K V. K D. & compleantur coni B V A. B D A; eſtque con B V A. con B D A [a] :: K V. K D [b] :: K T. V C + K T [c] :: con B V A. port B V A. [d] ergo con B D A = port B V A. *Q. E. F.*

[a] 11. 12. [b] *conſt.* [c] 34. 35, 36, 37 *hujus.* [d] 9. 5.

His ſubjiciemus ea, quæ è dictis conſectari ſubinnuit *Archimedes* in præloquio ad hunc librum ſuo.

Prop. XXVIII.

Similes ſphæroideon & conoideon portiones (B V A, D X F) *triplicatam inter ſe rationem habent axium ſuorum* (V K, X L). Fig. 153. Fig. 154.

Sint C, E centra figurarum, & T, S axium extrema; & [a] quia eſt K B. K V :: L D. L X; [b] liquet conos B V A, D X F eſſe ſimiles, [c] adeóque triplicatam habere rationem diametrorum, vel axium V K, X L, (unde ſtatim patet portiones B V A, D X F, ſi parabolicæ fuerint, habere quoque triplicatam eorundem axium rationem; in reliquis autem) ob figurarum ſimilitudinem [d] ipſarum latera proportionalia ſunt, [e] hoc eſt T K × K V. K Bq :: S L × L X. L Dq. ergo ex æquo eſt T K × K V. K Vq :: S L × L X. L Xq [f] hoc eſt T K. V K :: S L. L X. & per converſionem rationis T K. T V :: S L. S X. adeóque T K. C V [g] :: S L. E X. & componendo T K. T K + C V :: S L. S L + E X [h] hoc eſt con B V A. port B V A :: con D X F. port D X F. ergo permutando con B V A. con D X F :: port B V A. port B X F.

[a] *hyp. & 9 def. hujus.* [b] 24. *def.* 11. [c] 12. 12. [d] 26, 27 *hujus, & 15. 5.* [e] *hyp. & 5. 6. hujus.* [f] 21. *Apoll.* [g] 1. 6. & 11. 5. [h] 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37 *hujus.*

BXF. [1]ergo portiones BVA, DXF triplicatam quoque rationem habent axium VK, SL. *Q.E.D.*

1 11. 5.

Coroll. Hinc ſimiles integræ figuræ ſphæroides triplicatam axium rationem habent.

Nam ex hoc generali diſcurſu ipſarum dimidiæ portiones ita ſe habent.

Prop. XXXIX.

Fig. 155. Fig. 156. *In ſphæroidibus figuris æqualibus* (BVAT, DXFS) *quadrata è diametris* (BA, DF) *proportione reciprocantur axibus; &, ſi quadrata diametrorum reciprocentur axibus, æqualia ſunt ſphæroidea.*

Si ſphæroides æquales ponantur, erunt ipſarum [a]ſubquadrupli coni BVA, DXF æquales; [b]adeóque erit BAq. DFq:: EX.CV [c]:: SX. TV. *Q.E.D.*

a 32. *hujus.* b 15. 12. c 15. 5.

Sin ponatur eſſe ST. TV ([c]hoc eſt EX. CV):: BAq. DFq. [b]erunt ideo coni BVA, DXF pares; ac adeò horum [a]quadruplæ ſphæroides æquabuntur. *Q.E.D.*

Prop. XL.

Fig. 157. Fig. 158. *A data ſphæroidis aut conoidis portione* (BVA) *portionem abſcindere plano ad datum planum parallelo, ita ut abſciſſa portio æquetur dato cono* (ZXY).

Not. XP eſt altitudo coni, & ZY diameter baſis, ZP radius.

1. In parabolico conoide ſit VK axis, & ſectionis per axem parameter R; fiat verò 3R. ZP:: ZP. G. & inter XP ac G reperiatur media proportionalis, cui æquetur VK; & per K ducatur planum BA axi rectum, erit portio BVA æqualis dato cono. Nam fiat $KQ = \frac{1}{2}VK$. [3]ergo conus BQA æquatur portioni BVA. Eſt verò QK. XP [b] :: $\frac{1}{2}$ VK. XP [c] $\frac{1}{2}$ G. VK [d] :: $\frac{1}{2}$ RG. R * VK [e] :: ZPq. R * VK [f] :: ZPq. BKq. [5] :: QK. XP. ergo conus BQA æquatur cono ZXY. adeóque portio BVA cono ZXY æquatur. Itaque ſi dato plano parallela ducatur DN tangens ſectionem BVA in D; & ducatur diameter DE = VK; & per E ducatur planum SG ad DN parallelum; [g] liquet abſolvi propoſitum.

a 26 *hujus.* b 7. 5. c *conſt. &* * d 1. 6. e *conſt. &* 7. 6. f 11. 1 *Apol.* g 11. 5. [h] *ſub. ad fin. ult.* 2 *Apoll.* i 28 *hujus.*

2. In ſphæroide, & conoide hyperbolico problema ſolidum eſt, cujus analyſin ſubjungam. VT eſt axis. BA ad VT perpendicularis.

Analyſis.

Analyſis.

In ſphæroide ſit V T = *t*. parameter V R = *r*. X P = *m*. Z P = *n*. conus B Q A = port B V A. K V = *a*. unde B K*q* = $ra - \frac{r}{t}aa$. K V. K Q :: $t-a.\frac{1}{2}t-a$ :: $a.\frac{3ta-2aa}{2t-2a}$ = K Q. Ob portionem B V A = con B Q A.

X P. Q K :: B K*q*. Z P*q* (ob con B Q A = con Z X Y)

$m.\frac{3ta-2aa}{2t-2a}$ :: $\frac{rta-raa}{t}.nn$. ergo fit æquatio $2ra^4-5tra^3+3ttraa+2tmnna-2ttmnn=0$. Ponatur $r=n$. erit $a^4-\frac{1}{2}ta^3+\frac{1}{2}ttaa+tmna-ttmn=0$. Iſta veró æquatio dividitur per $a-t$, & fit $a^3-\frac{1}{2}taa+tmn=0$. vel $tmn=\frac{1}{2}taa-a^3$.

Ejuſmodi veró Problemata generalibus ex methodis optimè conficiuntur.

Addenda

Addenda locis infrà citatis.

[*Poſt Prop. IV.*] *Schol.*

ARchimedea doctrinæ complendæ ſubjiciemus antecedenti ſuppar circa reliquas ſectiones conicas theorema.

Fig. 160. Fig. 161. *Si ab eadem hyperbola, vel ellipſe quomodocunque reſecentur duæ portiones* (B V A, S D G), *quarum à verticibus ad baſes interceptæ diametri* (V K, D E) *ſemidiametris* (C V, C D) *proportionales ſint, tam ipſæ portiones, quàm iis inſcripta triangula æquabuntur.*

Sit primùm altera diameter V K ſectionis axis; & ſint C F, C H ſemidiametri ipſis C V, C D conjugatæ; ſectionem verò tangant rectæ (per vertices V, D ductâ) V M, D N concurrentes in M; & per V ducatur L I K tangenti D N (ac ipſis proinde C H, E S) perpendicularis. Demùm ducantur D P ad M V, & M Y ad V K parallelæ. Et quia rectangula triangula M Y D, V M X ſimilia ſunt; eſt [a] Y M. V X (V P. V X) :: D M. M V [b]:: C H. C F. verùm ratio V P ad V X componitur è rationibus V P ad V N, & V N ad V X, [b] hoc eſt è rationibus C V ad C N, & C N ad X L; è quibus iiſdem componitur ratio C V ad X L. ergo eſt C H. C F :: C V. X L. atqui per hypotheſin eſt C V. V K :: C D. D E (hoc eſt) :: L X. X I; permutandóque C V. L X :: V K. X I. [c] ergo C H. C F :: V K. X I; hoc eſt E S. K B :: V K. X I; unde patet inſcripta triangula B V A, S D G æquari; ſed & hinc ipſas portiones conſtabit è ſequenti theoremate: unde colligetur (prorſus eodem modo ſicut in hac *Prop.* 4.) univerſim præſtituta conditione præditas portiones ſibimet æquari.

[a] *cor.* 16. 3. *Apol.*
[b] *cor.* 36. 1 *Apol.* & 2. 6 *elem.*
[c] *coroll. infr.*

Fig. 162. 163. Sint duæ quælibet portiones ellipticæ vel hyperbolicæ B V A, S D G. quarum interceptæ diametri V K, D E ſemidiametris V T, D O proportionales ſint, & altitudines (V K, X L) baſibus (B A, S G) reciprocè proportionentur (V K. X L :: S G. B A): iſtæ portiones æquales erunt.

Diametri V K, D E ſimiliter utcunque dividantur in punctis Y, P; per quæ ducantur rectæ Z φ baſi B A; & rectæ Q R baſi S G parallelæ: item per puncta Z, φ ducantur rectæ Z H, φ F ad diametrum

trum VT; & QI, RK ad diametrum DE parallelæ. Et quia CV. VK[a] :: CD. DE. [b] erit CV. CK :: CD. CE. & ideo CVq. CVq—CKq :: CDq. CDq—CEq. [c] hoc est CVq. TK × KV :: CDq. OE × ED. Item simili ratione, quia CV. VK[a] :: CD. DE. & VK. VY[d] :: DE. DP; adeóque ex æquo CV. VY :: CD. DP; erit CVq. TY × YV :: CDq. OP × PD; & permutando TY × YV. OP × PD :: CVq. CDq :: TK × KV. OE × ED. Et rursus permutando TK × KV. TY × YV :: OE × ED. OP × PD; [e] hoc est BAq. Zφq :: SGq. QRq; & BA. Zφ :: SG. QR; adeóque permutando BA. SG :: Zφ. QR. Cùm igitur sit BA. SG[a] :: XL. VK; [f] erit Zφ. QR :: XL. VK. Est verò XL, NL[g] :: DE. PE[d] :: VK. YK; & permutando XL. VK :: NL. YK, [f] ergo Zφ. QR :: NL. YK. [h] unde parallelogramma ZHFφ, QIKR æquantur; quod cùm omnibus ejusmodi parallelogrammis (utrique portioni inscriptis aut circumscriptis) conveniat, satis perspicuum est ipsas portiones BVA, SDG æquari.

a *hyp.*
b *cor.* 19. 5.
c 5. 2.
d *const.*
e 21. *I Apol.*
f 11. 5.
g 2. 6.
h 16. 6.

Hanc propositionem *Vinc. Viviani* primus, opinor, detexit, nec ideo laude suâ fraudandus: hæc autem demonstratio de penu nostro. *in fig. præced.*

Coroll. |BA. SG| :: CF. CH :: Zφ. QR.
|BA. SG| :: VM. DM.

[*Ad Prop. XXXIII.*]

Schol.

Si conoidis hyperbolici duæ portiones (BVA, SDG) *resecentur, quarum axes* (VK, DE) *accedentibus axi* (CV, CD) *proportionales sint,, ipsæ portiones æquales erunt.* Fig. 164.

Sit primùm axium alter VK basi rectus; secetur autem conois plano per axem ad planum SG recto faciente hyperbolen, in qua portiones BVA, SDG, quarum diametri VK. DE. tangant verò sectionem rectæ VM, DM; & sit DP ad SG perpendicularis. Et quoniam est CV. VK[b] :: CD. DE. [c] erit DM. MV :: GS. AB. [d] ergo AB est alter axis ellipsis, quæ basis est portionis SDG. Item est DP. VK[e] :: BA. SG[e] :: BAq. BA × SG[f] :: ⊙BAq. ellips, BA. SG. [g] ergo segmenta conica BVA, SDG æquantur. Cùm igitur sit port BVA. segm con BVA[h] :: 3CV + VK. 2CV + VK

a 12 *hujus A.*
b *hyp.*
c *cor. sch.* 4 *b.*
d *cor.* 14 *huj.*
e 1. 6.
f 6 *hujus.*
g *sch* 11 *b.*
h 30 *hujus.*

j 31 *huj.* k *mot. infra.* l 14. 5. m 15. 5. n 11. 5.

VK[k]:: 3CD + DE. 2CD + DE[l]:: port SDG. segm con SDG. [l]ergo quoque portiones BVA, SDG æquantur.

Not. (Quia CV. VK:: CD. DE. est 3CV. VK[m]:: 3CD. DE. & componendo 3CV + VK. VK:: 3CD + DE. DE. & permutando 3CV + VK. 3CD + DE:: VK. DE. Simili processu est 2CV + VK. 2CD + DE:: VK. DE. [n]quare 3CV + VK. 3CD + DE:: 2CV + VK. 2CD + DE. & permutando.)

Hinc universim, positâ conditione præditæ portiones æquantur: æquantur enim omnes portioni rectæ BVA. ergo inter se.

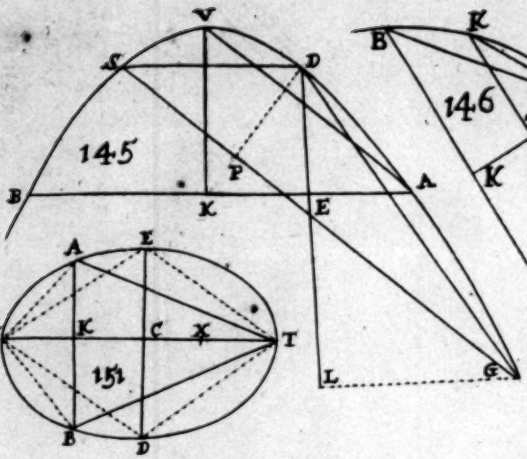
[*Ad Prop. XXXVII.*]

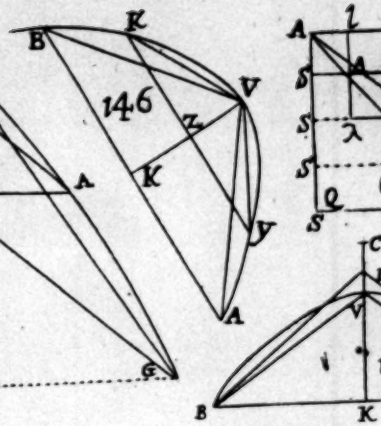
Schol.

Fig. 165. *Si Sphæroidis dua portiones* (BVA, SDG) *resecentur, quarum axes* (VK, DE) *axibus integris, vel semiaxibus* (VC, DC) *proportionales sint, æquales erunt portiones.*

Omnino tali discursu probatur, quali theorema Scholii prop. 33. tantùm loco cor. prop. 14. adhibetur coroll. prop. 15 hujus. Quid plura?

166.

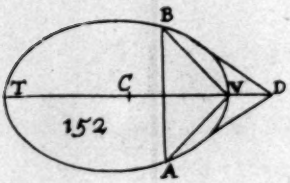

145
V
S
D
B
K
E
P
A
L
G

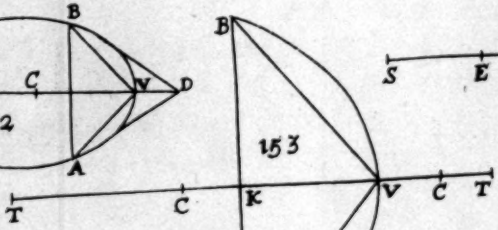

146
K
B
V
Z
K
V
A

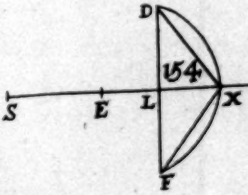
A
S
S
S
S
λ
Q

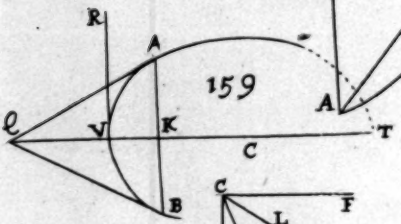
A
Z
V
K
C
X
T
151
B
D

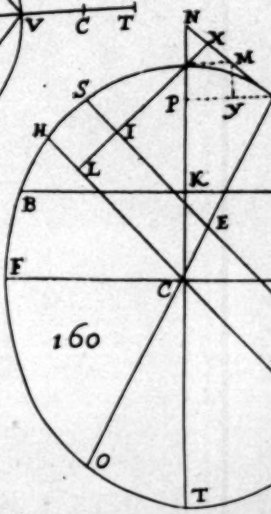
C
V
B
K

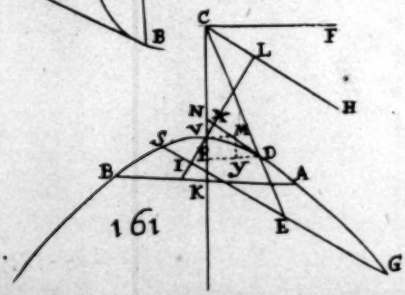

B
T
C
V
D
152
A

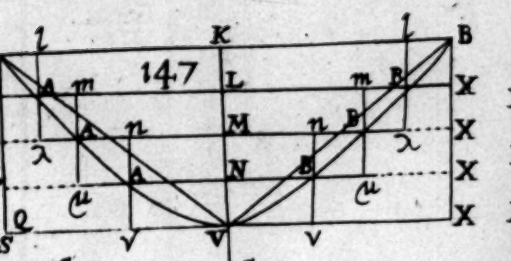

B
153
T
C
K
V
C
T

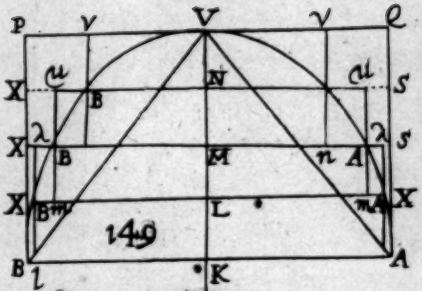

D
154
S
E
L
X
F

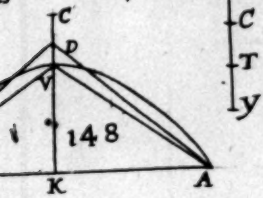

R
A
159
A
Q
V
K
T
C
B

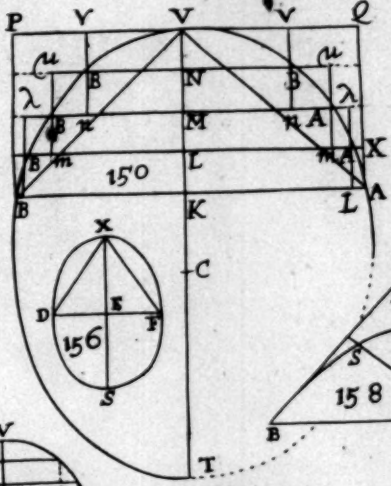

N
X
M
S
P
y
H
I
L
K
B
E
F
C
160
O
T

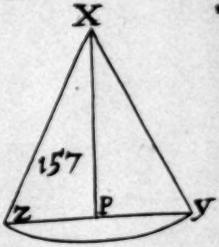

C
F
L
H
N
X
V
M
S
E
D
B
I
y
A
K
161
E
G

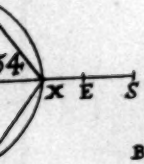

147


149


148

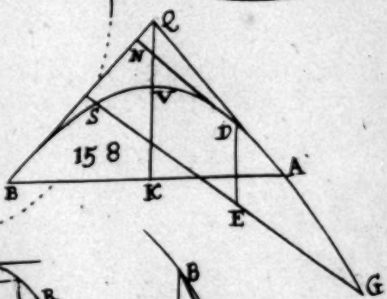

150

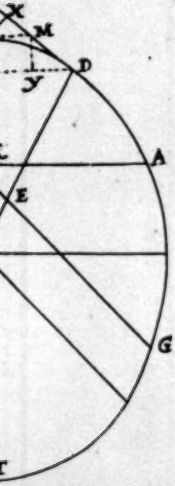

157

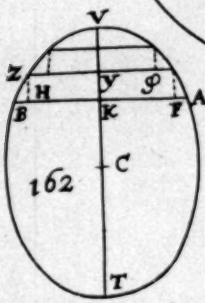


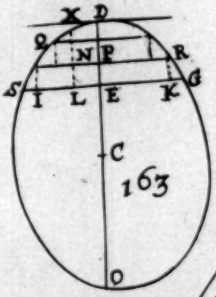
155

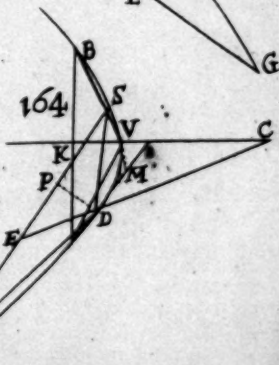
156

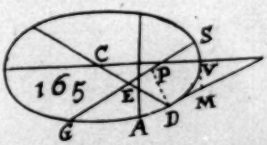

158




162


163


164


165

l 31 huj.
k mot. infra
l 14. 5.
m 15. 5.

n 11. 5.

Fig. 1

C

De Planorum Æquilibriis, *sive* Centra Gravitatum in Planis.

Libra, *generaliter accepta, aliàs* Latinis *Statera, trutina, lanx, bilanx*; Græcis ζυγὸς & ζυγὰ; πλάστιγξ & πλάστρα; σταθμὸς, σταθμίον, & σταθμία; πλαστίγξ, τεσύρα) *eſt machina, vel inſtrumentum magnitudinum, mediante pondere per ipſum explorato, quantitatibus dimetiendis & dignoſcendis comparatum; juxtáque Mathematicam abſtractionem, & ſimplicitatem conſiderata, nil aliud eſt, quàm linea quædam recta, indefinitè utrinque protenſa, in qua punctum aliquod, immobili ſuſtentaculo fultum, inſtarque centri fixum perſiſtit (centri proinde nomine donatum) dum lineæ circa ipſum pars utraque ponderis ubivis incumbentis, aut appenſi niſu, premitur aut attrahitur; ita quidem ut prævalens grave partes, quibus annectitur, deprimat, adverſaſque conſequenter elevet; aſt ſi contranitentia gravia paribus certent efficaciis, tota ſitum conſervet, & in æquilibrio perſeveret. Satis verò conſtat, experientiâ ſuffragante, ponderum in libra vires (ſicut & potentias motivas in vectè, ſimilibuſque machinis) à duabus omnino cauſis dependere; ab ipſium ſcilicet abſoluto pondere, vel ab ipſa magnitudinis (intra certam aliquam phyſicam ſpeciem conſiſtendo) quantitate) & ex ejus à centro diſtantia. Nam & majus pondus ad eandem diſtantiam, & æquale pondus ad eandem diſtantiam gravitandi efficaciâ prapollere compertum eſt. Verùm ad poſteriorem cauſam attendendo, quâ propter ipſam exactâ ratione creſcant aut minuantur vires, haud ita facilè diſcernatur aut demonſtretur à priori,* Fig. 166.

vi. Sanè quòd æqualium ponderum vires eâdem cum distantiis suis proportione justè crescant, alterum est è præcipuis totius Staticæ, *quam habemus, & totius* Mochlicæ *(totiusque proinde* Mechanicæ*) fundamentis; cui tamen an sola* Geometria, *vulgaribus utens postulatis & hypothesibus astruendo sufficiat, equidem non leves sunt causæ dubitandi. Non aliud adsumit hujus Author Libelli (rem simpliciter & summatim exprimendo) huic principio stabiliendo, quàm idem (vel æquale) pondus in majore distantia magis gravitare, quo concesso vix elici posse videtur ponderis ejusdem vires distantiis accuratè proportionari: cur enim inde colligatur eâdem potius quàm aliâ quâvis proportione gravitationem istam increscere. Isthuc nihilominus enititur hic Author, quo successu non disputo (cum brevitati consulens, tum quia Censorem hîc non ago, nec Advocatum, sed Interpretem). Caterum an pro genuino* Archimedis *fœtu sit agnoscendus hic libellus, & prorsus idem sit cum eo, quem* τὸ μηχανικὸν *nomine inscriptum aliquoties allegat* Archimedes *(de quadr. parab. prop. 6. & 10.) cum pluribus de causis ambigere liceat, nil tamen admodum refert anxiè disquirere; talis saltem apparet, ut integram suam perfectionem vel non adeptus primo fuisse, vel postea non retinuisse videatur. Sunt tamen in eo, quæ tanti parentis indolem aliquatenus sapiunt, nec* Archimedeum *planè dedecent acumen. Utcunque perquam utilis est, ut qui primò præcipua* Statices *elementa sternit, & quantum forte rei natura fert, confirmat; tum figurarum planarum rectilinearum, centra gravitatum, exquisitâ sanè methodo multisque posteriorum ratiociniis lucem præferente consignat. Superficiebus autem gravitatem assignare non veretur; quidni, æquè ac quantitatem? idem de lineis dictum intellige.*

PO-

Postulata, seu Hypotheses.

Petimus (vel supponimus)

I. *Æqualia gravia ab æqualibus longitudinibus (seu distantiis) æquiponderare.*

Schol.

Æqualia gravia, magnitudine, siquidem homogenea sunt; sin specie diversa, saltem absoluto pondere; longitudines autem intelligit à centro libræ (hoc est ab immobili libram sustinenti puncto) ad centra gravitatis appensorum ponderum (vel ad rectas saltem horizonti perpendiculares per dicta centra transeuntes) protensas. Cùm verò de gravitatis centro hîc potissimùm agatur, mirum videatur (vide num id Librum hunc imperfectum & ἀκέφαλον arguat) nullam centri talis definitionem comparere. Inesse gravi cuicunque magnitudini punctum aliquod unum, ejusquam gravis exactè medium, & æqualibus undiquaque momentis stipatum, à quo suspensum vel utcunque sustentatum grave persistet immotum, & ad nullas undicunq; partes vergens aut propendens, à nonnullis postulatur, *alii probare conantur. Illud verò gravitatis centrum appellatur, & à *Pappo* sic definitur: Dicimus autem centrum gravitatis singuli cujusque corporis esse punctum quoddam intus situm, à quo cogitatione suspensum grave quiescit, & delatum conservat eam, quam ab initio habuit, positionem, neutiquam in latione sua circumlatum.

* *Lucas Val. post. I. vide Pappum I. VIII. Vide sis infra Schol. Prop.*

Sit, ex. gr. sphæra, cujus diameter A B horizonti parâllela, vel obliqua; si concipiatur hæc appendi perpendiculo Z C ad centrum C, perstabit immota; dimissa verò recta procedet*; at si perpendiculo Y D appendatur eadem ad aliud diametri punctum D, gyrationem concipiet circa punctum D, & nunquam consistet, donec punctum C, adeóque tota recta A B perpendiculo Y D protracto coincidat: unde punctum C erit centrum gravitatis sphæræ. (Ita *Pappi* definitionem interpretor, nonnihil à lectione discedens, quam *Commandinus* exhibet; nempe pro ἡμερεῖ φερόμενον, καὶ φυλάσσει τὴν ἐξ ἀρχῆς θέσιν (quod sensum præfert perobscurum, ut videtur, & perplexum) lego (tantùm unam voculam transponendo) ἡμερεῖ, καὶ φερόμενον φυλάσσει δὲ; forsan verò scripserit *Pappus*, ἡμερεῖ, φερόμενον δὲ; facilè siquidem fuit transcriptori characterem voculæ καὶ, pro charactere quo designa-

Fig. 167.

* *Nullâ vertigine circumlata.*

tur si accipere) rei pleniori intelligentiæ quasdam aliorum scriptorum definitiones subjungam.

Lib. de centro grav. solidorum.

Commandinus. Centrum gravitatis uniuscujusque figuræ solidæ est punctum illud intra positum, circa quod undique partes æqualium momentorum consistunt.

Lucas Valerius. Cujuslibet figuræ gravis centrum gravitatis est punctum illud, a quo suspensum grave per se manet partibus quomodocunque circa constitutis.

Stevinus. Gravitatis centrum est ex quo vel solâ cogitatione suspensum corpus quemcunque situm dederis, illum retinet.

Idem. Gravitatis centrum est per quod plana quævis ducta corpus in duas partes æquiponderantes dividunt.

* ροπῆς.

Quæ de solidis illi pronunciant, tu superficiebus & lineis applica, debitam observans analogiam; & adde subsequentem *Eutocii* Commentatiunculam: *Archimedes* (inquit) in hoc libello centrum *propensionis figuræ planæ reputat, à quo suspensa manet horizonti parallela; duorum autem vel plurium planorum centrum propensionis (vel ponderationis) à quo jugum (hoc est *Libra*, vel *Statera*) suspensum horizonti existit parallelum.

Coroll. 1. Ex his, & axiomate præmisso consectatur, quòd libræ centrum est centrum gravitatis gravis ex æqualibus gravibus ad æquales distantias appensas compositi.

2. Etiam ex hoc axiomate colligitur Gravis cujuscunque multiplex ad eandem vel æqualem distantiam, æquè multiplum habere momentum momenti primo gravi competentis (momentum appellitamus vim gravitandi, seu gravis simul ac absoluto pondere consideratis). Nam singuli gravis æqualis appositio momentum æquale confert. Ergo totius multiplicis momentum aggregabitur è tot æqualibus momentis, quot ipsum partibus æqualibus constat.

Similiter, æquisecto gravi quocunque, momentum ejus (ad æqualem distantiam) æquisecabitur.

3. Sequitur unicum cujusque magnitudinis fore centrum gravitatis.

Aliàs duæ rectæ parallelæ (vel duo plana æquidistantia) magnitudinem in partes æquiponderantes dividerent, hoc est: pars toti æquiponderet.

II. Æqualia verò gravia ab inæqualibus distantiis non æquiponderare, sed ad illum grave propendere, quod magis elongatur.

Sch.

Sch. Æquè patet hoc: ſi gravium æqualium alterum præponderat, illud à libræ centro remotius eſt.

III. Siquidem, cùm à quibuſdam diſtantiis gravia æquiponderent, alteri gravium adjiciatur aliquid; non æquiponderari, ſed ad illud grave propendere, cui quid adjectum eſt.

Æquè liquet, ſi gravia à quibuſdam diſtantiis æquiponderet, eorum alterum magis elongatum præponderare, minúſque diſtans elevari.

IV. Quinetiam ſimiliter, ſi à gravium (æquiponderantium) altero quippiam auferatur, æquilibrium non fieri, ſed ad illud grave inclinari, à quo nil ademptum eſt.

Æquè clarum eſt, ſi gravibus æquiponderantibus adjiciantur vel adimantur æquiponderantia, æquilibrium perſiſtere.

V. Æqualium & ſimilium figurarum planarum invicem congruentium, & centra gravitatum mutuò congruere.

Idem de magnitudinibus aliis (corporibus & lineis) æquè verum & manifeſtum eſt.

VI. Inæqualium autem & ſimilium (figurarum) centra gravitatum ſimiliter erunt poſita.

Definitio.

VII. Puncta verò ſimiliter poni dicimus ad ſimiles figuras, à quibus ad æquales angulos ductæ rectæ faciunt angulos cum homologis lateribus æquales.

Ex g. In ſimilibus triangulis A B C, D E F, ſi à punctis Z, Y ducantur ad angulos rectæ; fuerint verò ſingillatim anguli ad Z æquales angulis ad Y; qui nempe lateribus triangulorum homologis opponuntur. quin & anguli Z A B, Y D E; & Z A C, Y D F, & reliqui reliquis, qui homologis eorundem lateribus adjacent, pares fuerint; ſimiliter poni dicentur hæc puncta Z, Y. Fig. 168. 169.

VIII. Si magnitudines à quibuſdam diſtantiis æquiponderent, & ipſis æquales ab iiſdem diſtantiis æquiponderabunt.

IX. Omnis figuræ, cujus perimeter ad eaſdem partes eſt cava, centrum gravitatis intra figuram ſit oportet. Fig. 170.

Sit in talis figuræ (A B C) perimetro punctum quodvis B, per quod recta linea, vel planum (I X) figuram contingat; ſanè liquet punctum

Vide defin. ad poſt. 1.

ctum B non eſſe centrum gravitatis figuræ, quia totum pondus ad unas ipſius X T partes jacet ac propendet; multò minùs ex ſimili cauſa punctum D, extra figuram ſitum, erit centrum gravitatis dictæ figuræ. Idem in ipſis lineis ad eaſdem partes cavis intellige; earum nempe centrum gravitatis nec in ipſis, nec ad ipſarum partes convexas, ſed intra cavum exiſtere.

Prop. I.

Converſa 1. poſt.

Quæ ab æqualibus diſtantiis æquiponderant gravia, ſunt æqualia.

Nam ſi alterutrum excedat, exceſſu dempto, reſiduum alteri exæquabitur, & [a]æquiponderabit; [b]unde tota non æquiponderabunt, adversùs hypotheſin. ergo neutrum excedit. *Q.E.D.*

a 1 *poſt. huj.*
b 3. *poſt. huj.*

Schol. Hoc æquè verum adde: Quæ ab æqualibus diſtantiis non æquiponderant, ſunt inæqualia.

Nam ſi æqualia eſſent, [c]æquiponderarent, contra hypotheſin.

c 1. *poſt. h*

Et hoc: Si gravia æqualia æquiponderent, diſtantiæ ſunt æquales. Nam ſi inæquales eſſent, non æquiponderarent, contra hypotheſin.

Prop. II.

Inæqualia gravia ab æqualibus diſtantiis non æquiponderant, ſed ad majus vergent.

Nam ſi à majori dematur exceſſus, reſiduum æquabitur & [a]æquiponderabit minori: quare totum majus [b]præponderat. *Q. E. D.*

a 1. *poſt. huj.*
b 3. *poſt. huj.*

Schol.

Momenta ponderum ad eandem (vel æqualem) à libræ centro diſtantiam, ponderibus ipſis proportionalia ſunt.

Fig. 171.

Gravium A, B ad æquales diſtantias C A, C B appenſorum momenta ſint α, ζ. Sit autem M utcunque multiplex gravis A, & μ æquè multiplum momenti μ. [a]ergo μ eſt momentum gravis M ad diſtantiam C A. Similiter ipſorum B, ζ ſumptis æquè multiplis N, ν; erit ν momentum gravis N ad B appenſi: quòd ſi M =, ⊏, ⊐ N, erit reſpectivè μ [b]=, [c]⊏, [c]⊐ ν. unde A. B :: α. ζ *Q.E.D.*

a 2 *cor.* 1. *poſt.*
b 1 *poſt. huj.*
c 2 *hujus.*

Hiſce verò ſuppoſitis.

Prop.

Prop. III.

Inæqualium æquiponderantium (A, B) *distantiæ* (C A, C B) *sunt inæquales; & minor* (C A) *majoris* (A). Fig. 172.

Sit enim A — X = B. ergo ad has distantias præponderabit B ipsi A — X. quapropter erit C B ⊏ C A. *Q.E.D.*

Coroll. Simili modo liquet ab inæqualibus distantiis (C A, C B) æquiponderantium (A, B) id majus esse, quod est à minore distantia (C A).

Sit enim C Q = C A. [a]ergo B ad distantiam C Q minùs ponderat, quàm ad distantiam C B, [b]hoc est quàm A ad distantiam C A. [c]unde liquet esse B ⊐ A. *Q.E.D.*

a 2 *post. huj.*
b *hyp.*
c *sch.* 1. & 2 *h.*

Prop. IV.

*Si duæ æquales * magnitudines* (A, B), *non idem habeant centrum gravitatis, ex ambabus compositæ magnitudinis* (A + B) *centrum gravitatis erit medium* (C) *rectæ* (A B) *conjungentis centra gravitatis magnitudinum.* Fig 173.

* *Magnitudines æquales homogeneas intellige, tum hic, tum in sequentibus; vel æqualia duo pondera, (nam de æqualibus magnitudinibus specie differentibus (aut saltem pondere diversis) non valet.)*

Quòd centrum compositæ magnitudinis A + B sit in recta A B, προδέδεικται, inquit Auctor; unde colligitur in editis libris aliquid deficere, nam tale quid nullibi præmonstratum apparet: nos illud verò, simul ac illam, quæ præ manibus est, propositionem è definitione centri gravitatis utcunque deduximuus. vide *Coroll. Scholii ad* 1 *post hujus.*

Prop. V.

Si trium magnitudinum (A, C, B) *centra gravitatis* (A, C, B) *in directum posita sint, & æqualem magnitudines gravitatem habeant, & quæ inter centra sunt rectæ* (C A, C B) *æquales sint, ex omnibus compositæ magnitudinis centrum gravitatis erit punctum* (C) *quod & centrum gravitatis est ipsarum mediæ* (C).

Nam quia magnitudo C æquilibratur in puncto C, & huic utrinq; ad æquales distantias accedunt æqualia pondera A, B, non mutabitur æquilibrium. *Vide sch. ad* 4. *post. hujus.*

Vel

a 4 *hujus.*
b *hyp.*

Vel ſic: quia punctum C eſt centrum *gr.* [a]ipſius A + B, & [b]ipſius C; [a] erit totius A + B: + C centrum gravitatis inter C, & C medium, hoc eſt ipſum C.

Coroll.

1. Ex hinc patet, quòd ſi quotcunque magnitudinum multitudine imparium centra gravitatis in directum poſita ſint, ſiquidémque tum æqualiter à media magnitudine diſtantes æqualem gravitatem habeant, tum rectæ ipſarum centris interjectæ æquentur: ex omnibus compoſitæ magnitudinis centrum gravitatis erit punctum, quod & ipſarum mediæ centrum eſt gravitatis.

2. Sin autem multitudine pares ſint magnitudines, & centra gravitatis ipſarum in directum poſita ſint, & ipſarum mediæ (*necnon æqualiter utrinque diſtantes à mediis) æqualem gravitatem habeant, & centris interjectæ rectæ æquentur; ex omnibus compoſitæ magnitudinis centrum gravitatis erit punctum medium rectæ centra mediarum connectentis, ut ſubſcribitur, (& in appoſita figura expreſſum vides.

* *Iſta verba deſunt in exemplaribus; at ſupplenda eſſe cùm res ipſa docet, tum hujus applicatio in prop. IX (vel 7 in Baſiloenſi Græca) ubi habentur verba,* καὶ πάντα τὰ ἐφ' ἑκάτερα τῶν μέσων &c.

Fig. 174.

Prop. VI.

Fig. 175. *Commenſurabiles magnitudines* (Z, Y) *æquiponderant à diſtantiis eandem reciprocè proportionem habentibus cum gravibus.*

a *hyp.*
b 10. 10.
c 3. 10.
d 2 *ax.* 1.
e *conſt.*
f 2 *ax.* 10.
g 15. 5.
k *priùs.*

Sint C A. C B :: Z. Y. ergo cùm [a]ſint Z, Y commenſurabiles, [b]erunt quoque rectæ C A, C B commenſurabiles; [c] ſit igitur harum communis menſura M; fiant verò A E, & A D ſingulæ æquales ipſi C B, & B F = C A. [d]ergo eſt E B = C A = B F; & E F = 2 C A; [e] ac E D = 2 C B. [f]ergo M ipſas E F, E D metitur; & eſt E F. E D :: [g] C A. C B [c]:: Z. Y. quoties autem M metitur E F, toties quædam X metiatur Z. quapropter erit M. E F :: X. Z. [k]Item eſt E F. E D :: Z. Y. ergo erit ex æquo M. E D :: X. Y. adeóque quoties M metitur E D, toties X metietur Y; & eſt X menſura communis ipſarum Z, Y. Itaque ſi dividatur E F in partes æquales ipſi M, & Z in totidem æquales ipſi X, & ſingulis ipſius E F partibus ad ipſarum medium punctum appendatur æqualis ipſi X, harum omnium gravitatis centrum erit punctum B (ſiquidem æquinumeræ ſunt hinc inde.) Similique prorſus ratione punctum A centrum gravitatis erit tot eidem X æqualium, quoties M continetur in E D, ipſam Y com-

componentium, & similiter disposítarum. Harum autem omnium gravitatis centrum erit punctum C, rectam F D bisecans (quippe D A = C B, & A C = B F, ac ideo C D = C F) ergo si Z ponatur ad B, & Y ad A, hæ ad distantias C B, C A æquiponderabunt. *Q. E. D.*

Coroll.

Si sit Z. Y ⊐ C A. C B. præponderabit Y ad A posita ipsi Z ad B constitutæ, & vice versâ; si Y præponderet ipsi Z, erit Z. Y ⊐ C A. C B.

Schol.

Non ignoro contra discursum hunc quædam objectari, quin ipse superiùs inqui principiis ipsis suspicionis causam subesse: sed non est animus disputare, nec incumbit mihi judicium interponere. Refero mentem auctoris, eam neq; tuebor, nec impugnabo. In altero de æquiponderantibus, qui vulgò inscribitur libro, ratiocinium adhibet ab hoc nonnihil diversum, sed eisdem exceptionibus obnoxium. *Prop.* 1.

Prop. VII.

Quinimò si incommensurabiles sint magnitudines (Z X Y) *à distantiis* (C B, C A) *eandem reciprocè cum magnitudinibus proportionem habentibus æquiponderabunt.* Fig. 176.

Si neges; alterutra Z X præponderet, itaque minor eâ quædam æquiponderabit; hanc inter & totam Z X [a]sumatur media quævis Z, ipsi Y commensurabilis. [b]Patet Z (quoniam æquiponderante [c]major est) ipsi Y præponderare. Verùm ob Z. Y [d]⊐ (Z X. Y [e].:) C A. C B; [f]præponderabit Y ipsi Z: quæ repugnant.

Similiter è distantiis arguamus licet. Si Z X præponderet ad distantiam C B, æquiponderet ad E, & inter C B, C E media [a]sumatur aliqua C D ad C A commensurabilis; [k]ergo Z X præponderabit ad D. Sed contra quia Z X. Y [e].: (C A. C B) [d]⊐ C A. C D; [f]præponderabit Y ipsi Z X ad D positæ: quæ rursus adversantur sibi.

a *lemm ad* 8. 3. *Tbeod.*
b 3 *post. hujus.*
c *consst.*
d 8. 5.
e *hyp.*
f *coroll. præc.*
k *ad* 3 *post.*

Ex duabus præcedentibus universalis conflatur hæc propositio: *Gravia qualibet è distantiis reciprocè proportionalibus æquiponderant.*

Quæ simul ac semel hoc modò succinctiùs (& *Archimedeis* fermè principiis insistendo) ostendi possit. Sit recta quævis A B, utcunque secta in D: bisectis partibus D A, D B in E, & F, totâque A B bisectâ in C; liquet E fore centrum partis D A, & F partis D B, & Fig. 177.

C totius A B ; adeóque D A + D B ſuſtentata in C æquilibrabitur. Cùm igitur ſit $EC = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}DA$; & $FC = \frac{AB-DB}{2}$. adeóque E C. F C :: A B—D A. A B—D B :: D B. D A: ſunt rectæ D A, D B centrorum diſtantiis E C, F C reciprocè proportionales : & cum hiſce rectis quælibet gravitates, ipſarum magnitudinibus proportionales, aſſignari poſſint, æquè de quibuſcunque gravibus hoc verum erit.

Cæterùm ex hoc Palmario, *totiuſque Staticæ præcipuo theoremate* complura ſubnaſcuntur *Corollaria.*

I. Si gravia quælibet è quibuſvis diſtantiis æquiponderent, etiam iis proportionalia quævis gravia ab iiſdem diſtantiis (homologa homologis) æquiponderabunt.

11. 5. Retinebitur enim reciproca gravium & diſtantiarum proportionalitas.

II. Si æquiponderantibus addantur aut ſubtrahantur æquiponderantia, tota vel reſidua æquiponderabunt.

12. 5. Nec enim hîc immutabitur reciproca proportionalitas.

Axiomatis accenſeri meruit hæc propoſitio, ſuprà nobis, *Ubaldo*, & aliis.

Fig. 178. *III. Æqualium gravium* (A, B) *momenta diſtantiis ſuis* (C A, C B) *proportionalia ſunt.*

Quâvis aſſumptâ diſtantiâ C Q concipiatur eſſe Z. A :: C A. C Q.
a 6, 7 *hujus.* [a]ergo ponderis Z ad Q ſuſpenſi momentum æquatur momento ponderis A ad diſtantiam A C. Item ſit B (vel A). Y :: C Q. C B. [a]ergo momentum ponderis Y ad Q æquatur momento ponderis B ad diſtantiam B C. Eſt autem ex æquo Z. Y :: C A. C B ; &
b *ſch. 2 huj.* momenta ponderum Z, Y ad Q ſuſpenſorum [b]ipſis Z, Y prodortionalia ſunt. ergo liquet propoſitum.

IV. Quorumcunque gravium (A, B) *ad quaſcunque diſtantias momenta compoſitam habent è ponderum ipſorum & diſtantiarum* (C A, C B) *proportionibus rationem.*

Nam momentum ponderis A in A poſiti ad momentum ponderis
c 20. *def. V.* B in B, rationem [c]habet compoſitam è ratione momenti ponderis A
d *cor. præc.* in A ad momentum ponderis A in B poſiti ([d]hoc eſt è ratione diſtan-

tiæ

tiæ C A ad C B) & è ratione momenti ponderis A in B ad momentum ponderis B in B positi (ᶜhoc est è ratione ipsius A ad B). Hinc verò ᶜ *ſch. 2 hujus.*

V. *Momenta gravium ſe ad invicem habent, ut ipſa gravia ducta in ſuas diſtantias.*

Nempe C A × A repræsentat momentum gravis A ad distantiam A C; & B × B C momentum exhibet gravis B ad distantiam B C.

Hinc quòd è gravi in suam distantiam ducto provenit, à quibusdam momentum appellatur; quale momentum notum & distantiæ applicatum exhibebit ipsum grave; per ipsum verò grave divisum distantiam notificabit.

VI. Si recta (A B) *duarum quarumvis magnitudinum centra* (A, B) *connectat, ex iis compoſitæ magnitudinis centrum in iſta recta* (A B) *exiſtet.* Fig. 179.

Nam si divisa concipiatur recta A B in C, ᵃ sic ut sit A. B :: C B. C A; ᵇmagnitudines A, B ad distantias C A, C B æquiponderabunt; ᶜadeóque punctum C erit centrum gravitatis compositæ A + B. unde ᵃ *1 c. 6.* ᵇ *6 & 7.* ᶜ *not. ad 1 poſt.*

VII. Si quotcunque magnitudinum centra ſint in una recta, compoſitæ ex omnibus magnitudinis centrum in eadem exiſtet.

Nam compositæ ex duabus quibuscunque centrum in illa ᵈerit, tum ejus compositæ, ut unius, & tertiæ centrum in eadem erit; ac harum trium, & alterius quartæ consimili pacto, & sic porro, donec ad omnium summam perventum est. ᵈ *6 cor.*

Prop. VIII.

Si ab aliqua magnitudine (M N O) *detrahatur magnitudo* (M N P) *non habens idem centrum cum toto, reliquæ magnitudinis* (N P O) *centrum gravitatis eſt, ſi recta* (A C) *gravitatum centra totius magnitudinis, & ablatæ connectens, protrahatur ad eaſdem partes, ad quas eſt totius magnitudinis centrum* (C), *& accipiatur quædam* (C B) *è protracta dicta centra conjungente, ſic ut eandem rationem habeat ad illam* (C A, *centris* (C A) *interjectam, quam habet gravitas ablatæ magnitudinis* (M N P) *ad gravitatem reliquæ* (N P O), *acceptæ terminus* B. Fig. 180.

ᵃ Patet enim centra totius & partium in una recta (B C) versari; positóque punctо D reliduæ N P O centro, quia C totius M N O centrum ᵇest, ᵇ& A partis M N P, ᶜ erit C D. C A :: M N P. N P O ᵃ *6 cor. præc.* ᵇ *hyp.* ᶜ *6 & 7 hujus.*

d 9. 5. e *conſt.* b:: CB. CA. d ergo CD = CB: & puncta D, B coincidunt, e quare B eſt centrum partis NPO. *Q.E.D.*

Coroll.

Fig. 181. Ex his facilè (juxta methodum, vel hypotheſin indiviſibilium) conſectatur centrum gravitatis figuræ cujuſlibet planæ in ejus, ſiquam habet, diametros (hoc eſt in recta baſi parallelas rectas biſecante) verſari; necnon centrum gravitatis figuræ cujuſcunque ſolidæ in ejus axe (hoc eſt in recta per parallelorum baſi planorum centra tranſeunte) reperiri.

a 7 *cor. præc.* Nam quia, verbi gr. centra rectarum MN (baſi BA parallelarum) ſunt in diametro VK, a erit ex omnibus conſtitutæ figuræ VBA centrum in eadem VK. Idem de ſolidis liquido clarum eſt; quin & de ſuperficiebus, & lineis quibuſvis axem habentibus, aut axi rectam analogam.

Prop. IX.

Fig. 182. *Omnis parallelogrammi* (MNOP) *centrum gravitatis exiſtit in recta* (VK) *oppoſitorum parallelogrammi laterum biſegmenta connectente.*

Ex præcedente corollario ſatis liquet, at moroſius *Archimedes* hoc modo.

a *cor* 1. 10. b 10. 1. & 1. *def.* 6. c 36. 1. d *cor.* 5. * *Hoc ſumit auctor, aſt ubi probaverit, non reperio; expende ſis annon principium petat.*

Si negas, eſto centrum alicubi extra VK in D; per quod ducatur DC ad MN parallela. Continuâ jam æquiſectione rectæ VN aliquando a relinquetur ſegmentum VK⊐CD; ſimilitérque diviſâ VM, ſi per utriuſque ſegmenti (VN, VM) diviſiones ducantur ad VK parallelæ, diſpertietur totum parallelogrammum MO in parallelogramma b ſimilia, & c æqualia ipſi QK, & ad utraſque rectæ VK partes æquinumera; [* quin & horum omnium centra ſunt in una recta, pariter à ſe diſſita;] d ergo totius ex his compoſiti parallelogrammi MO centrum exiſtet in recta mediorum centra connectente. Verùm D extra medium QK ſitum eſt. ergo D non eſt centrum, contra quod ipſe aſſeruiſti.

Aliter.

Fig. 183. f 36. 1. g 29. 1. & 1. *def.* 6. Sint A, B centra parallelogrammorum MK, VO, quæ connectat recta AB, ſecans ipſam VK in C, ducantúrque AK, BV. & quoniam parallelogramma MK, VO f æqualia ſunt, ac g ſimilia, ſi conjungantur ea, ipſorum centra congruent. Quare rectæ AK, BV (ad

ad æquales & congruentes angulos ductæ) congruent, ut & anguli VKA, KVB: ſed & anguli ACK, VCB [k]pares ſunt. [l]ergo rectæ CA, CB congruent, & æquales erunt. [m]ergo CA. CB :: pgr VO. VP; [n]conſequenterque punctum C eſt centrum totius parallelogrammi MO. *Q.E.D.*

h 5. *poſt. hujus.*
k 15. 1.
l 26. 1.
m 7. 5.
n *vid. 6 cor. 7. hujus.*

Coroll. Simul patet centrum C rectam VK biſecare. Nam recta CV, CK congruent.

Simili diſcurſu oſtendetur in *circulo, ellipſe, ſphæra, ſpharoide, (talibuſque cæteris figuris)* idem eſſe centrum gravitatis, & ipſius figuræ. Fig. 184.

Sit enim VK diameter, & A, B centra gr. ſegmentorum VMK, VNK; quæ, ſegmentis congruentibus, congruent. adeóque triangula ACK, BCV congruent; & propterea CA = CB; ac VMK. VNK :: CB. CA. adeóque C eſt centrum gr. totius. quinetiam CV = CK; & proinde C eſt centrum figuræ. Liquet igitur.

Prop. X.

Cujuſcunque parallelogrammi (MNOP) *centrum gravitatis eſt punctum* (C) *in quo diametri conveniunt.* Fig. 185.

Recta VK biſecet adverſa parallelogrammi latera MN, PO; & EF biſecet latera MP, NO. [a]Igitur in utraque VK, EF eſt centrum gravitatis parallelogrammi MNOP; [b]ergo interſectio C eſt centrum: ſed & in hoc diametri conveniunt: nam connexis CM, CO; quia CK [c]= CV; & KO [d]= VM, & ang CKO [e]= ang CVM, eſt ang KCO [f]= ang VCM; adeóque OCM eſt linea recta: quare diameter MO per C tranſit. Simili diſcurſu ducta diameter PN per C tranſibit. Et liquet propoſitum.

a 9 *hujus.*
b 10 *ax. 1. el.*
c *conſt. & 34. 1.*
d 29. 1.
e 4. 1.
f 2 *ſch.* 15. 1.

Prop. XI.

Si duo triangula (VBA, XDE) *ſimilia ſint inter ſe, & in ipſis puncta* (C, K) *poſita ſimiliter ad triangula; unumque punctum* (C) *trianguli in quo exiſtit centrum ſit gravitatis, etiam reliquum punctum* (K) *eſt centrum gravitatis trianguli, in quo exiſtit.* Fig. 186. Fig. 187.

Si negas, aliud Z centrum eſto; **rectæque** ducantur à punctis K, C, Z ad angulos æquales D, B; & E, A. Et quia puncta Z, C ſunt ſimilium triangulorum XDF, VBA [a] centra, [b]ſimiliter erunt poſita; [c]quapropter anguli ZDE, CBA pares ſunt. At verò quia puncta

a *hyp.*
b 6 *poſt. hujus.*
c 7 *poſt hujus.*

K,

d 1 ax. 1. el. e 9. ax. 1. K, C [b]similiter posita sunt, [c] etiam ang K D E = ang Z D E. [d] ergo anguli K D E, Z D E æquantur. [e] *Q. E. A.*

Prop. XII.

Fig. 188. 189. *Si duo triangula* (V B A, X D E) *similia sint, unius autem trianguli* (V B A) *gravitatis centrum* (C) *sit in recta* (V L) *ab angulo quopiam ad mediam basin ducta, etiam reliqui trianguli centrum gravitatis erit in consimili ducta rectâ* (X M).

a 10. 6. b *hyp.* [a]Fiat V L. V C :: X M. X K; & connectantur rectæ C B, C A; K D, K E. & quia V B. B A [b]:: X D. D E; erit consequentes bifariando V B. B L :: X D. D M. Item ang V B L = [b] X D M. [c]ergo

c 6. 6. triangula V B L, X D M similia sunt; [c] & est B V. V L :: D X. X M.

d *const.* ergò cùm sit V L. V C [d] :: X M. X K; erit ex æquo V B. V C :: D X. X K. [e]ergo triangula B V C, D X K similia sunt. quare reliqua triangula C B L, X D M etiam similia sunt. Simili discursu patebit triangula C V A, K X E; & triangula C A L, K E M assimilari. [e]quare puncta C, K similiter poni constat. unde cùm C [f]sit centrum trianguli B V A, [g]erit K trianguli D X E centrum. *Q. E. D.*

e 7. *post. hujus.* f *hyp.* g 6. *post.*

Prop. XIII.

Fig. 190. *Omnis trianguli* (V B A) *centrum gravitatis est in recta* (V K) *quæ ab angulo* (B V A) *in mediam deducta est basin.*

Constat hoc aliquatenus è dictis apud Prop. 8. ast *Archimedeam* ἀκρίβειαν negligere non licet, quam plerique juniores, in hujusmodi materiis, imitantur. Fontes, è quibus posteritas hausit, & exemplaria quæ respexit, imprimis jucundum est contemplari. Sic igitur procedit Auctor noster.

Si negas; esto centrum Z, extra rectam V K; & ab Z ducatur

a *ver.* 1. 10. Z Y ad A B parallela. [a]Bisecetur K A continuò, donec segmentum K E minùs evadat ipsâ Z Y; similique ratione dividatur reliqua semissis K B; tum utrinque per divisionum puncta ducantur rectæ E O, F N, G M, H R, I Q, L P, ad V K parallelæ; connectantúrque rectæ P M, Q N, R O (quæ basi B A parallelæ erunt; quia V K. M G [b]:: A K. A G [c]:: B K. B L [b]:: V K. P L; [d]ideóque M G = P L, & simili discursu F N = I H &c). Liquet autem parallelogrammorum L M, [e] N, O centra gravitatis [e] existere in recta V K (eorum

b 4. 6. c *sch.* 7. 5. d 9. 5. e 9 *hujus.*

quippe

quippe baſes [f]biſecanti) & proinde totius ex iis compoſitæ, triangulo inſcriptæ figuræ, [g]centrum in eadem V K fore; quod ſit C; connectatur C Z, eique protractæ occurrat A S ad K V parallela. Patet autem triangulum V K B ad reſidua triangula P L B, Q ♀ P, R ↓ Q, V X R, *ſimul ſumpta ſe habere ſicut K B ad K H, (nam ductâ V H, triangulum V K H triangulis P L B, Q ♀ P, R ↓ Q, V X R æquatur; quoniam altitudo illius horum [g]altitudinibus ſimul ſumptis, & baſis ejus horum ſingulæ baſi æquatur; eſtque triang V K B. V K H [h]:: K B. K H. Item ſimili de cauſa patet triang V K A ad triangula M G A, V X O, & reliqua ex iſta parte, ſe habere ſicut K A ad K E (vel K B ad K H). *ergo junctim totum triangulum B V A ſe habet ad iſta cuncta reſidua triangula, ſicut K A ad K E, [k]hoc eſt ut C S ad C D; [l]hoc eſt in majori ratione quàm C S ad C Z. quare dividendo habebit figura dictis parallelogrammis conſtans ad reſidua cuncta triangula majorem rationem quàm Z S ad Z C; ſit ergo ſumma parallelogrammorum iſtorum ad dictam ſummam triangulorum, ut Z T ad Z C; ergo cùm ſit Z T. Z C ⊏ Z S. Z C. [m]erit Z T ⊏ Z S. quia verò Z eſt centrum gr. totius trianguli B V A, & C centrum dictæ ſummæ parallelogrammorum, & ſe reciprocè habet Z T ad Z C, ut ſumma parallelogrammorum ad reſiduam ex toto B V A ſummam triangulorum; [n]erit T centrum gravitatis dictæ reſiduæ triangulorum ſummæ; quod fieri ſanè [o]nequit; quoniam T ad unas hujus compoſitæ magnitudinis partes, & extra totum triangulum B V A poſitum oſtendebatur. Itaque potius trianguli centrum eſt in recta V K. *Q. E. D.*

f *hyp. & ſch. 4. 6.*
g *7 cor. 7 huj.*
* *12. 6.*
g *2. 6. & 12. 5.*
h *1. 6.*
k *2. 6.*
l *8. 5.*
m *10. 5.*
n *8 hujus.*
o *9 poſt. hujus.*

Aliter.

Si fieri poteſt, eſto centrum extra V K ad Z; connectantur Z V, Z B, Z A; & K R, K S biſecent ipſas V A, V B (unde patet K R V S eſſe parallelogrammum) item ducantur R T, S X ad V Z parallelæ, & connectantur S R X T, Z K, M N. Hinc cùm ſit B Z. B X [a]:: B V. B S [b]:: B A. B K [c]:: A B. A K [b]:: A V. A R [a]:: A Z. A T; [d] liquet S R, B A, X T, parallelas eſſe; & [d]K X, A Z, [d] & K T, B Z etiam eſſe parallelas. [e]Igitur in ſimilibus triangulis A R K, B S K, A V B puncta T, X, Z ſimiliter poni liquet. ergo cùm Z [f]ſit centrum trianguli A V B, [g]etiam T, X erunt centra triangulorum A R K, B S K. ergo punctum N rectam X T [h]biſecans, [k]erit centrum è triangulis A R K, B S K [l](æqualibus nempe) compoſitæ magnitudinis. Punctum verò M [m]eſt centrum parallelogrammi K R V S (diametrorum utique interſectio) [n]ergo totius ex iſtis triangulis, & hoc parallelogrammo

Fig. 191.

a *4. 6.*
b *const. & 15. 5*
c *7. 5.*
d *2. 6.*
e *7. poſt. huj.*
f *hyp.*
g *6 poſt. huj.*
h *hyp. ſch. 4. 6.*
k *4 hujus.*
l *26. 1.*
m *10. hujus.*
n *6 cor. 7 huj.*

grammo compoſiti trianguli V B A centrum erit in recta M N. Eſt verò M N (parallelogrammi quippe S R T X latera biſecans) ad R T, adeóque ad V Z [a] parallela, quapropter erit punctum Z extra rectam M N. ergo Z non eſt centrum, contra quam affirmabas.

[a] 33. 1.

Prop. XXIV.

Fig. 192. *Omnis trianguli* (B V A) *centrum gravitatis eſt punctum* (C) *in quo concurrunt rectæ* (V K, B E) *ab angulis ad media latera ductæ.*

[a] Eſt enim centrum in utraque V K, B E; [b] ergo in communi puncto.

[a] 13 *hujus.* [b] 10. *ax.* 1.

Coroll. 1. Viciſſim rectæ ab angulis per centrum biſecant latera. Aliàs enim, quum centrum ſit in iis quæ biſecant, plura forent centra; [b] quod fieri nequit.

[b] 3 *cor. ſch* 1. *poſt. hujus.*

2. Tres ab angulis rectæ adverſa latera biſecantes in uno puncto concurrunt. In centro nempe trianguli.

3. Recta C K = $\frac{1}{3}$ V K.

Nam connexa F E eſt ad B A [c] parallela; quapropter eſt C G. K C [d] :: C E. B C [d] :: F E. B A [d] :: V G. G K [e] :: 1. 2. ergo componendo eſt G K. C K :: 3. 2. adeóque V K. C K :: 3. 1.

[c] 2. 6. [d] 4. 6. [e] *ſch.* 4. 6.

Hoc corollarium *Archimedeis* autographis excidiſſe videtur: nam indemonſtratum (opinor) non aſſumeret auctor; quod facit tamen in proximè ſequenti.

Prop. XV.

Fig. 193. *Omnis trapezii* (B M N A) *duo latera* (B A, M N) *ſibi parallela habentis centrum gravitatis* (C) *eſt in recta* (X K) *parallelarum biſectiones conjungentes, ſic diviſâ, ut pars ejus* (X C), *terminum habens biſegmentum minoris* (M N) *parallelarum, ad reliquam partem* (C K) *hanc habeat rationem, quam habet utraque ſimul, æqualis duplæ majoris cum minori ad duplam minoris cum majori parallelarum* (X C. C K :: 2 B A + M N. 2 M N + B A).

Quod centrum trapezii ſit in X K patet; quoniam productis B M, A N ad concurſum in V, ducta V K ipſam M N quoque [a] biſecat, adeóque rectæ X K coincidit; & hinc utriuſque trianguli V B A, V M N centrum [b] eſt in V K, [c] adeóque reliqui trapezii B M N A centrum in eadem exiſtit. Porro [d] ſecetur recta X K tritariam in punctis H, G; per quæ ducantur rectæ O P, Q R ad B A parallelæ; itaque ductis

[a] *ſch.* 4. 6. [b] 13 *hujus.* [c] 8 *hujus.* [d] 10. 6.

ductis B X, N K, B N, has quoque [e]trisecabunt parallelæ O P, Q R. [f]ergo liquet punctum E fore centrum trianguli B N A; [f]& punctum F esse centrum trianguli M B N; adeóque connexâ E F, [g]hujus & [h]ipsius X K intersectio C erit centrum totius trapezii B M N A. [i]quapropter erit triang B N A. triang M B N ([k]hoc est B A. M N) :: C F. C E [l]:: C H. C G. unde antecedentes duplando componendóque est 2 B A + M N. M N :: 2 C H + C G. C G. Item simili discursu (inversè) 2 M N + B A. B A :: 2 C G + C H. C H. Igitur (istic & hîc permutando) 2 B A + M N. 2 C H + C G :: M N. C G :: B A. C H :: 2 M N + B A. 2 C G + C H. & rursus permutando 2 B A + M N. 2 M N + B A :: 2 C H + C G. 2 C G + C H. Est verò 2 C H + C G [r] = (C H + H G [r] =) C X. & 2 C G + C H = (C G + H G [r] =) C K. [s]quare 2 B A + M N. 2 M N + B A :: C X. C K. *Q. E. D.*

e 2. 6.
f 13 & 3. cor. 14 *hujus.*
g 6 cor. 7 *huj.*
h *prius.*
k 1. 6.
l 4. 6.
r *const.* & 2 *ax.* 1.
s 11. 5.

De Quadratura Parabolæ.

Archimedes Dositheo Felicitatem.

CUM audirem obiisse *Cononem*, qui nobis adhuc superstes erat in amicitia, te verò *Cononis* familiarem fuisse, & Geometriæ esse gnarum; illi quidem demortuo indoluimus ceu vero amico, & in Mathematicis planè mirabili; tibi verò protinus destinavimus mittere scribentes, ut *Cononi* decreveramus scribere, è Geometricis theorematis illud, quod antea quidem nemo contemplatus erat, à nobis verò jam perspectum est; primò quidem per mechanica repertum, postea verò Geometricè demonstratum. Eorum sanè, qui priùs Geometrica tractârunt, nonnulli aggressi sunt scribere, ut possibile fit *circulo dato, & circuli dato segmento æquale rectilineum spatium invenire*; nec non postea comprehensum sub *totius coni sectione, & recta spatium quadrare tentârunt; assumentes quæ nemo facilè concesserit *lemmata*; unde à multis illi damnati sunt hæc non advenisse. Veruntamen qui *parabole* segmentum comprehensum quadrare conatus fuerit, anteriorum scimus neminem, quod certè nunc à nobis inventum est; demonstratur enim *quòd omne segmentum comprehensum sub recta, & parabola, sesquitertium est trianguli basin habentis eandem, & altitudinem æqualem cum segmento*; hoc assumpto lemmate ad ejus demonstrationem, quòd inæqualium spatiorum excessus (quo majus excedit minus) potest ibi sibimet apponi, ut omne propositum finitum spatium exuperet: usurpârunt autem hoc lemma qui priùs extiterunt Geometræ; *etenim circulos duplicatam inter sese diametrorum rationem* habere demonstrârunt hoc utentes lemmate;

* ellipsis (*opinor.*)

De sph. & cyl. 1. ax. 5.

lemmate; & quòd *ſphæræ triplicatam inter ſe rationem habent diametrorum*; quinetiam *quòd omnis pyramis tertia pars eſt priſmatis eandem cum pyramide baſin habentis, & altitudinem æqualem*; & quòd *omnis conus ſubtriplus eſt cylindri eandem cum cono baſin habentis, & æqualem altitudinem*, ſimiliter prædictum lemma ſumentes ſcripſerunt. Evenit verò prædictorum theorematum ſingulis haud ſecus ac illis quæ abſque hoc lemmate demonſtrata ſunt adhibitam eſſe fidem; perinde etiam in ſimilem fidem adductis iis, quæ nos edidimus. Ejus igitur exſcriptas demonſtrationes mittimus, primò ſicut è mechanicis comperta ſunt, poſtea verò prout etiam per Geometrica demonſtrantur, præmittuntur autem & Elementa Conica, quæ ad demonſtrationem uſum habent. Vale.

Prop. I.

Fig. 194. *Si sit parabola* A B G; *sit autem recta* B D *parallela diametro, vel ipsa diameter; recta verò* A G *parallela illi, qua coni sectionem hanc contingit ad* B; *erunt* D A, D G *æquales. Sin &* D A *æquetur*
Apol. 46. 1. *Apol.* 5. 2. *ipsi* D G, *parallelæ. erunt ipsa* A G & *ea quæ sectionem contingit ad* B.

Prop. II.

Apol. 35. 1. *Si sit parabola* A B G; *sit autem recta* B D *parallela diametro, vel ipsa diameter; ipsa verò* A D G *parallela ei quæ sectionem contingit ad* B; *at recta* G E *sectionem comtingat in* G; *erunt* B D, B E *æquales.*

Prop. III.

Si sit parabola A B G; *recta verò* B D *diametro parallela, vel ipsa*
Apol. 29. 1. *diameter; & ducantur quædam rectæ* D G, Z H *parallelæ tangenti parabolam in* B; *erit ut* B D *longitudine ad* B Z, *ita* D G *potentiâ ad* Z H.

Hæc sanè (ait *Archimedes*) demonstrantur in conicis Elementis. —Cæterùm ambigi potest, utrum *Archimedes* Elementa citaverit, an ejus Transcriptores, omissis quas is apposuerat demonstrationibus ad illa nos ablegaverint. Utique de Conicis, quæ *Archimedis* temporibus extabant, Elementis nihil constat: ista saltem apud *Apollonium* jam habentur locis citatis.

Prop. IV.

Fig. 195. Fig 196. *Sit portio* A B G *comprehensa sub recta & parabola; recta verò* D B *à medio ipsius* A G *parallelo diametro ducatur, aut ipsa sit diameter; & connexa recta* G B *producatur; quòd si deducatur altera quæpiam* T Z *ipsi* B D *parallela, secans utramque rectarum* A G, B G; *eandem rationem habebit* Z T *ad* T I *quam* D A *ad* D Z.

a 2 6. b 34. 1. c 3 *hujus.* d 4. 6. e 20. 6. f 19. 5. g 11. 5.

Nam ducatur I K ad A G parallela: estque B Gq. B Tq [a]:: (ĐGq. D Zq [b] :: D Gq. K Iq [c]:: B D. B K [d]::) B G. B F. [e]quare B G, B T, B F sunt $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$. [f]unde B G. B T :: B G $\pm$ B T. B T $\pm$ B F :: T G. T F [d]:: T Z. T I. [g]est autem D G. D Z :: B G B T. [g]E go D G (D A). D Z :: T Z. T I. *Q. E. D.*

Prop.

Prop. V.

Si portio A B G *contenta ſub recta & parabola; & ab* A *ducatur diametro parallela* Z A; *à* G *verò ſectionem tangens in* G, *nempe* G Z: *ſiquidem in trigono* Z A G *ducatur aliqua* (K L) *parallela* A Z; *ducta* (K L.) *in eadem ratione ſecabitur à parabola, ac* A G *à ducta; homologa verò erit pars* (A K) *ipſius* A G *ad* A *ductæ parti* (K H,) *quæ ad* A G. Fig. 197.

Sit D B diameter parabolæ, & producantur D B E, G B M. Et ob D B [a] = B E, [b]erit K I = I L; [c]item K I. I H :: A D. D K; & permutando K I. A D :: I H. D K :: [d]K I ± I H. A D ± D K :: K H. A K. [e] ergo 2 K I. 2 A D (hoc eſt K L. A G) :: K H. A K [d] :: K L — K H. A G — A K :: H L. K G; permutandóq; K H. H L :: A K. K G. *Q.E.D.*

Coroll. [f]K L. K H :: A G. A K.

[a] 2 *hujus.* [b] *cor.* 4. 6. [c] 4 *hujus.* [d] 19. *vel* 12. 5. [e] 15. 5. [f] 4, & 18. 5.

Prop. VI.

Intelligatur verò illud (*quod & in ſpeculatione proponitur conſpiciendum*) *in* (*plano*) *recto ad horizontem, & in linea* A B; *dein quæ ſunt ad eaſdem partes cum* D *concipiantur deorſum quæ verò in adverſas ſurſum; Triangulum verò* B D G *ſit rectangulum, habens rectum ad* B *angulum, & latus* B G *æquale dimidio jugi, videlicet ut æquetur* B A *ipſi* B G; *ſuſpendatur verò triangulum ex punctis* B, G; *ſuſpendatur verò & aliud ſpatium* Z *ab altera parte jugi ad* A; *& æquiponderet ſpatium* Z *ſuſpenſum ad* A *trigono* B G D, *in ſitu quo jam ponitur: dico ſpatium* Z *trigoni* B D G *tertiam eſſe partem.* Fig. 198.

Sit enim B E = ⅓ B G; ducatúrque E C ad B D parallela; itaq; centrum gr. trigoni G B D [a]eſt in E C, & hoc ſuſpenſum ab E conſiſtet ipſi Z æquiponderans; quare triang G B D. Z [b]:: (A B. B E :: G B. B E ::) 3. 1. *Q.E.D.*

Conversè. Si Z = ⅓ triang B D G, æquiponderabunt Z, & B D G.

[a] 3 *cor.* 14. 1. *de æquip.* [b] 6 & 7. 1 *de æquip.*

Prop. VII.

Sit rurſus linea A G *jugum, medium verò ipſius ſit* B; *& ſuſpendatur ad* B *trigonum* G D H; *ſit verò trigonum* G D H *ambligonium, habens baſim* D H, *altitudinem verò parem dimidio jugi* (B G); *& ſuſpendatur trigonum* G D H *è punctis* B, G; *ſpatium verò* Z *ſuſpenſum ad* A *æquiponderet triangulo* G D H *ſic habenti ut nunc jacet: ſimiliter* Fig. 199.

militer de monſtrabitur ſpatium Z tertiam eſſe partem trigoni G D H.

Nam ſpatio Z adjiciatur E = ⅓ triang B D G; [a] quapropter E æquiponderat trigono B D G; [b] ergo Z + E æquiponderat toti B H G. quare 3 Z + 3 E = triang B H G; unde cùm 3 E [c] = triang B D G; erit 3 Z = D H G. Q.E.D.

a conv. 6 huj.
b 2 cor. 7. de de æquip.
c conſt.

Prop. VIII.

Fig. 200.

Sit jugum A, *medium verò ipſius* B; *& ſuſpendatur ad* B *trigonum rectangulum* G D E, *rectum habens angulum* E, *& ſuſpendatur è jugo ſecundum* G E; *ſpatium verò* Z *ſuſpendatur ad* A, *& æquiponderet ipſi* G D E *ſic habenti ut nunc jacet; quam verò rationem habet* A B *ad* B E, *hanc habeat trigonum* G D E *ad ſpatium* C: *dico ſpatium* Z *trigono* G D E *minus eſſe, ſed ipſo* C *majus.*

Sit trigoni E G D centrum gr. in perpendiculari H F; [a] quare Z triang E G D :: H B. B A. [b] ergo Z ⊐ triang E G D. Item H B. B A [c] ⊏ E B. B A [d] :: C. triang E G D, adeoque Z. E G D. ⊏ C. E G D. [e] ergo Z ⊏ C.

a 6 & 7. 1 æquip.
b 14. 5.
c 8. 1. 5.
d hyp.
e 10. 5.

Prop. IX.

Fig. 201.

Sit rurſus jugum quidem A G, *medium verò ejus* B, *trigonum verò* G D C *ambligonium, baſin quidem habens* D C, *altitudinem verò* E G; *& appendatur è jugo ſecundum* G E; *ſpatium verò* Z *dependeat ab* A, *& æquiponderet trigono* G D C, *ſic habenti ut modò ponitur; quam vero rationem habet* A B *ad* B E, *hanc habeat trigonum* G D C *ad* L: *dico ipſum* Z *majus quidem eſſe ipſo* L, *minus verò ipſo* G D C.

Demonſtratur ut præcedens.

Prop. X.

Fig. 202.

Sit rurſus A B G *quidem jugum, & medium ejus* B; *trapezium verò* B D C H, *angulos quidem ad puncta* B, H *rectos habens, latus verò* C D *inclinans verſus* G; *& quam habet rationem* A B *ad* B H, *hanc habeat trapezium* B D C H *ad* L; *ſuſpenſum verò ſit trapezium* B D C H *è jugo ad* B H; *item ſuſpendatur ſpatium* Z *ad* A, *& æquiponderet trapezio* B D C H, *ita ſe habenti ut jacet: dico ſpatium* Z *minus eſſe ipſo* L.

Nam

Nam [a]sit centrum trapezii B D C H in rectâ E F ad A G perpendiculari: éstque trap B D C H. Z (:: [b]A B. B E) [c]⊏ (A B. B H [d]::) trap B D C H. L. [e]ergo Z ⊐ L. *Q. E. D.*

a 15. 1 *æquip.*
b 6 & 7 *æquip.*
c 8. 5.
d *hyp.*
e 10. 5.

Prop. XI.

Sit rursus jugum quidem A G, *& medium ipsius* B; *sit verò trapezium* C D T R *habens quidem latera* C D, T R *tendentia ad* G, *sed ipsa* D R, T C *perpendicularia ad* B G; *& cadat* D R *in* B; *quam verò rationem habet* A B *ad* B H, *hanc habeat trapezium* C D T R *ad* L; *trapezium verò* C D T R *suspendatur ex jugo ad* B H; *&* Z *ex* A; *ac æquiponderet* Z *trapezio* C D T R, *sic habenti ut modò jacet: similiter ac priùs demonstrabitur spatium* Z *minus ipso* L. Fig. 203.

Imò planè similiter ac priùs; quid ergo plura?

Prop. XII.

Sit rursus jugum quidem A G, *medium verò ejus* B; *sit verò trapezium* D E H C, *ad puncta quidem* E, H *rectos habens angulos, latera verò* C D, E H *vergentia ad* G; *& quam quidem rationem habet* A B *ad* B H, *hanc habeat trapezium* D E H C *ad* M, *quam verò rationem habet* A B *ad* B E, *hanc habeat trapezium* B E H C *ad* L; *suspendatur verò trapezium* D E H C *è jugo ad* E H; *spatium verò* Z *suspendatur ex* A, *& æquiponderet trapezio ita se habenti, ut nunc subjicitur: dico* Z *majus esse ipso* L, *minus verò ipso* M. Fig. 204.

[a]Sit enim trapezii D E H C centrum gr in K N ad E D parallela; hinc trap D E H C. Z ([b]:: A B. B K) [c]⊐ (A B. B E [d]::) trap D E H C. L; [e]quare Z ⊏ L. Item trap D E H C. M ([d]:: A B. B H) [c]⊐ (A B. B K [b]::) trap D E H C. Z; [e]unde Z ⊐ M. Quæ *E. D.*

a 15. 1 *æquip.*
b 6 & 7. 1 *æquip.*
c 8. 5.
d *hyp.*
e 10. 5.

Prop. XIII.

Sit rursus jugum quidem A G, *& medium ejus* B, *trapezium verò* C D T R, *ita ut latera* C D, T R *vergant ad* G; *sed* D T, C R *perpendicularia sint ad* B G; *suspendatur verò è jugo ad* E H; *spatium verò* Z *suspendatur ex* A, *& æquiponderet trapezio* C D T R *sic habenti ut nunc ponitur; & quam quidem habet rationem* A B *ad* B E, *illam habeat trapezium* C D T R *ad spatium* L; *quam verò rationem* A B Fig. 205.

habet A B *ad* B H, *hanc habeat idem trapezium ad* M: *planè similiter ac in præcedenti oſtendetur* Z *majus quidem quàm* L, *minus verò ipſo* M.

Demonſtratur prorſus ut proximè antecedens.

Prop. XIV.

Fig. 206. *Sit portio* B K G *comprehenſa ſub recta, & parabola; ſit verò primùm* B G *ad rectos diametro, ducaturque à puncto* B *diametro parallela* B D; *à* G *verò ipſa* G D *tangens parabolam in* G; *enimverò erit* B G D *triangulum rectangulum; dividatur autem* B G *in quotcunque partes* B E, E Z, Z H, H I, *& à ſectionibus ducantur diametro parallelæ* E S, Z T, H V, I X; *à punctis verò* (F, K, P, O) *ad quæ ipſa ſecant parabolam, conjungantur rectæ ad* G, *& producantur: dico triangulum* B G D *trapeziorum quidem* C E, L Z, M H, N I, *& trigoni* X I G *minus eſſe quàm triplum; trapeziorum verò* Z F, H K, I F, *& trianguli* I O G *majus eſſe quàm triplum.*

Sit A B = B G, & ab A ſuſpendantur $\alpha, \zeta, \gamma, \delta, \iota$ æquiponderantia trapeziis D E, S Z, T H, V I, & trigono X I G, ſingula ſingulis, & cuncta proinde cunctis ſimul. Eſt verò G B. (A B). B E :: E S. E F :: triang E S G. E F G. Item E S. E F :: B D. B C :: triang B D G. B C G. quare B D G. B C G :: E S G. E F G :: B D G — E S G. B C G — E F G (hoc eſt) :: trap D E. C E; ergo trap C E $\sqsubset \alpha$. Simili diſcurſu eſt A B. B Z :: trap S Z. L Z; ac inde trap L Z $\sqsubset \zeta$, & A B. B H :: trap T H. M H; ideóque trap M H $\sqsubset \gamma$; item A B. B I :: trap V I. N I, atque idcirco trap N I $\sqsubset \delta$; ac denique A B. B I :: triang X I G. O I G; & proinde triang X I G $\sqsubset \iota$; quare junctim C E + L Z + M H + N I + X I G $\sqsubset \alpha + \zeta + \gamma + \delta + \iota$. Porro quoniam trap S Z. F Z :: S E. F E :: A B. B E; erit trap F Z $\sqsupset \zeta$, ſimiliterque trap K H $\sqsupset \gamma$, & trap P I $\sqsupset \delta$, & triang O I G $\sqsupset \iota$; ac denique trap F Z + K H + P I + O I G $\sqsupset \zeta + \gamma + \delta + \iota$: cùm itaque ſit $\alpha + \zeta + \gamma + \delta + \iota$ = triang D B G, liquet propoſitum.

a 2 *cor.* 7. *aquip.*
b *cor.* 5 *hujus.*
c 1. 6.
* *cor.* 4. 6.
d 11. 5.
e 19. 5.
e 10. *hujus.*
f 12. *hujus.*
g 8 *hujus.*
h *ut priùs.*
k 6 *hujus.*

3

Prop. XV.

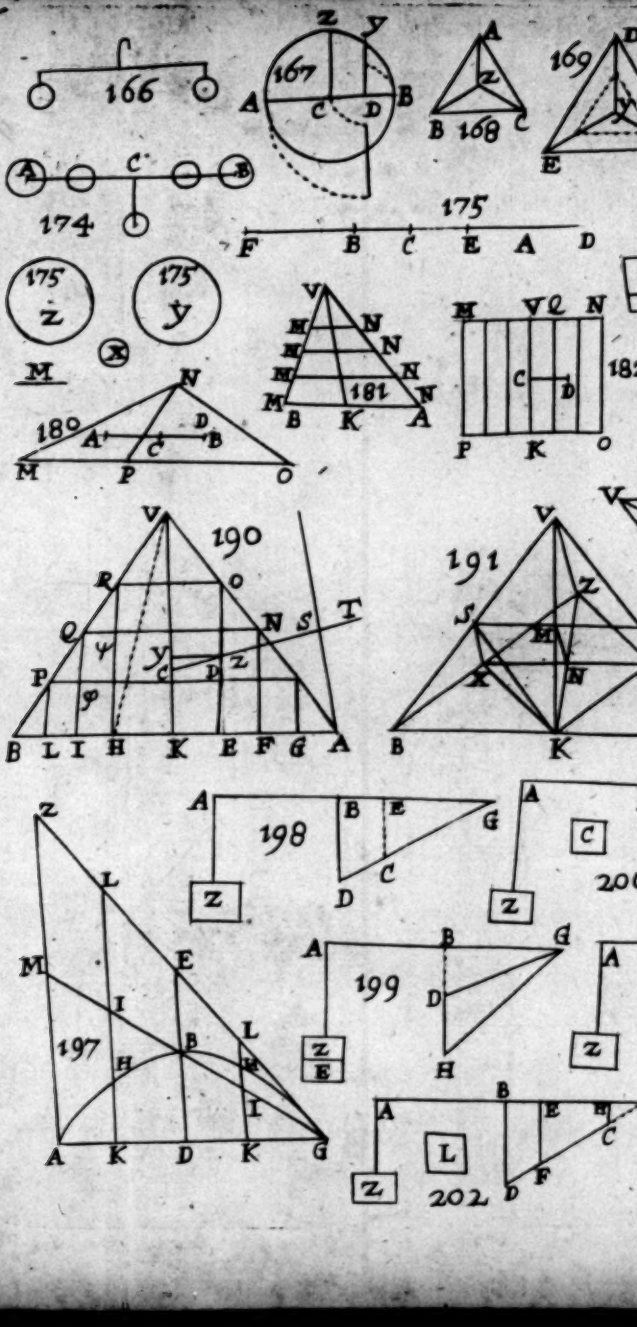
Fig. 207. *Sit rurſus portio* B K G *comprehenſa ſub recta, & parabola, verùm* B G *non ſit diametro normalis; eſt autem neceſſe vel illam quæ à puncto* B *diametro parallela ducitur ad eaſdem partes ſectioni, vel iſtam*

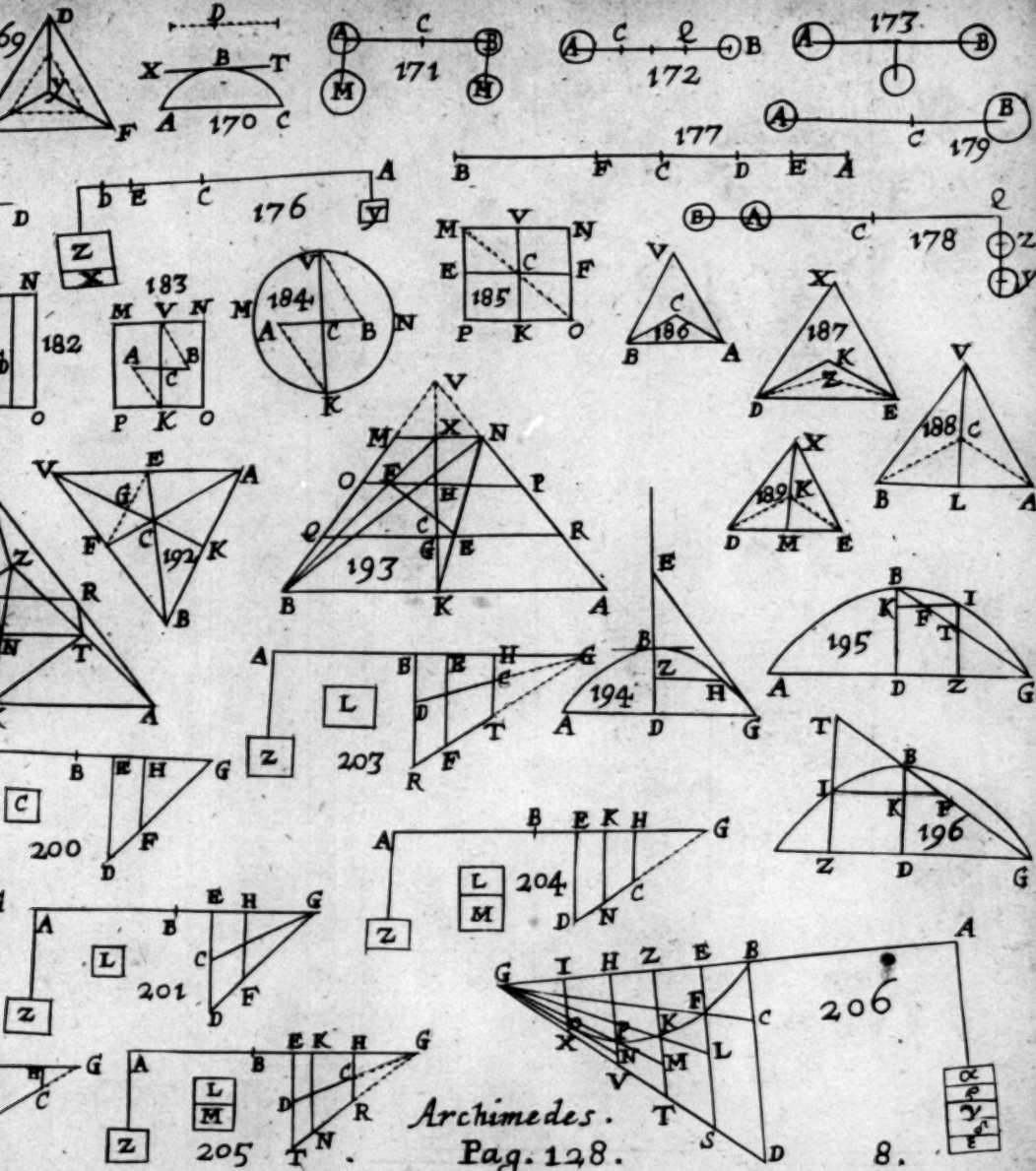
quæ

08.

6.
8.

Max.


166
167
168
169
174
175
175 z
175 y
180
181
182
190
191
197
198
199
200
202



Archimedes. Pag. 128. 8.

Fig. 20

a 2 cor. 7
quip.
b cor. 5 huj
c 1. 6.
* cor. 4. 6.
d 11. 5.
e 19. 5.
e 10. hujus
f 12. hujus
g 8 hujus.
h ut prius
k 6 hujus.

Fig. 20

quæ à G, *obtusum facere angulum ad* B G; *obtusum angulum faciat quæ ad B, & à B ducatur diametro parallela* B D; *& à* G *ipsa* G D *parabolam contingens in* G, *& dividatur* B G *in quotcunque partes* B E, E Z, Z H, H I, I G; *& ab* E, Z, H, I *ducantur diametro parallelæ* E S, Z T, H V, I X, *& à punctis quibus hæ secant parabolam conjungantur rectæ ad* G, *& extendantur: enimverò & nunc dico triangulum* B D G *trapeziorum quidem* C E, L Z, M H, N I, *& trianguli* X I G *minus esse quàm triplum; ipsorum verò* Z F, H K, I P, *& trianguli* G O I *majus esse quàm triplum.*

Eadem prorsus est demonstratio quæ præcedentis, nisi quòd hic pro 10 & 12 hujus, adhibentur 11 & 13. Quorsum itaque παραλογίαν.

Prop. XVI.

Sit rursus portio B X G *comprehensa sub recta, & parabola; & per* B *quidem ducatur* B D *parallela diametro, à* G *verò ipsa* G D *tangens parabolam in* G, *sit verò spatium* Z *tertia pars trigoni* B D G: *dico portionem* B K G *æquari spatio* Z. Fig. 208.

Si fieri potest, sit primò Z ⊐ port B K G. Secetur tum B D in partes æquales B C, C Q, Q R, R Y, Y D, ita ut sit triang B G Z ⊐ port B K G — Z; unde erit Z ⊐ port B K G — triang B G Z. conjungantur G C, G Q, G R, G Y occurrentes parabolæ punctis F, K, P, O; per quæ ducantur E S, Z T, H V, I X ad B D parallelæ. (Liquet verò ipsas B E, E Z, Z H, H I, I G etiam æquari; * ob D C. C B :: S F. F E² :: G E. E B; & D Q. Q B* :: T K. K Z² :: G Z. Z B &c.) * *cor. 4. 6.* 24 *hujus.*

Quia verò B C = C Q, *erit E F = F L; [b] unde trap F Z = trap F K; item ob Z ρ * = K M, [b] erit trap ρ H = trap K P; paritérque trap ↓ I = trap P O, & triang I G X [b] = triang O G X, ergo triang B G C = trap B F + F K + K P + P O + triang O G K. ergo Z (⅓ triang B D G) ⊐ (port B K G — : trap B F + F K + K P + triang O G X ⊐) trap F Z + K H + P I + triang O I G; contra 14 vel 15 hujus. [b] 37. 1. & 2 ax. 1.

Sin dicatur Z ⊏ port B K G, sit triang B G C ⊐ Z — port B K G; unde portio B K G + triang B G C ⊐ Z, hoc est port B K G + trap B F + F K + K P + P O + triang O G X ⊐ ⅓ triang B D G, ergo fortius erit trap C E + L Z + M H + N I + triang X I G ⊐ ⅓ triang B D G; itidem contra 14 aut 15 hujus.

Quin itaque potiùs erit Z = port BK G. *Q.E.D.*

Prop. XVII.

Fig. 209. *Hoc demonſtrato, liquet quod omnis portio (A B C), comprehenſa ſub recta, & parabola, ſeſquitertia eſt trianguli (A B C) habentis baſin eandem cum portione, & altitudinem æqualem.*

Ducatur tangens C F, cui occurrat diameter D B in E, eíque parallela A F; & ob D B [a] = B E, [b] erit triang D E C ([c] id eſt $\frac{1}{4}$ triang A F C) = 2 triang D B C [b] = triang A B C. atqui [d] eſt port A B C = $\frac{1}{3}$ triang A F C; ergo triang A B C port. A B C :: $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{3}$ :: 3. 4 :: 1. $1\frac{1}{3}$. *Q.E.D.*

a 2 *hujus.* b 4. 6. c 20. 6. d 16 *hujus.*

Hoc quod artificio quaſi mechanico ſic adſtruxerat, dehinc methodo prorſus Geometricâ demonſtratum exhibebit.

Definitiones

Portionum ſub recta & curva comprehenſarum

1. Baſin quidem appello rectam iſtam;
2. Altitudinem verò maximam perpendicularem à curva linea demiſſam in baſin portionis;
3. Verticem verò punctum, à quo maxima perpendicularis ducitur.

Prop. XVIII.

Fig. 210. *Si in portione (A B C), quæ continetur ſub recta & parabola, à media baſe ducatur recta (D B) diametro parallela; vertex erit portionis punctum (B), in quo ducta diametro parallela (D B) ſecat parabolam.*

Recta E F contingat parabolam in B, & demittatur B G ad A C perpendicularis; & quia E F eſt [a] parallela baſi A C, liquet B G eſſe maximam perpendicularem earum quæ à ſectione duci poſſunt in AC; & [b] proinde B fore verticem portionis A B C. *Q.E.D.*

a 1 *hujus.* b 2 *def. ad 17. hujus.*

Prop. XIX.

Fig 211. *Si in portionem (A B C) comprehenſam ſub recta & parabola ducantur duæ rectæ (D B, F E) parallelæ diametro, illa quidem (D B) à media baſe, hæc verò (F E) à media dimidia; erit ducta à media*

baſe

baſe (D B) *ducta à media dimidia* (F E) *ſeſquitertia longitudine.*

Nam ducatur (E G) parallela baſi A C; & quia B D. B G [a] :: D Aq. G Eq [b] :: D Aq. D Fq [c] :: 4. 1, erit [d] convertendo B D. G D (B E) :: 4. 3 :: 1 $\frac{1}{3}$. 1. *Q.E.D.*

a 3 *hujus.* b 34. 1. c 20 *hujus.* d *cor.* 19. 5.

Cor. B D. B G :: 4. 1.

Prop. XX.

Si portioni (A B C) *comprehenſæ ſub recta & parabola inſcribatur triangulum* (A B C) *eandem baſin habens cum portione, eandemque altitudinem, majus erit inſcriptum* (A B C) *quàm dimidium portionis.* Fig. 212.

Per verticem B ducatur tangens E F ([a] quæ baſi eſt parallela), cui occurant A E, C F diametro parallelæ; liquétque pgr A E F C [b] (hoc eſt a triang A B C) majus eſſe portione A B C.

a 1 *hujus.* b 41. 1.

Coroll. Hinc, liquet, quòd huic portioni poſſibile eſt polygonum inſcribere, ita ut relictæ portiones minores ſint omni propoſito ſpatio.

Nam ſi portionibus A G B, C H B inſcribantur triangula, [a] hæc auferent plusquam ſemiſſes portionum A H B, C H B; & ſi in reliquis id fiat, idem continget. [b] quare tandem ad reliquias dato ſpatio minores perveniatur neceſſe eſt.

a 10 *hujus.* b 1. 10.

Prop. XXI.

Si portioni (A B C) *comprehenſæ ſub recta & parabola inſcribatur triangulum* (A B C) *eandem baſin habens cum portione, eandemque altitudinem; inſcribantur verò & alia triangula* (A H B, C F B) *relictis portionibus* (A H B, C F B), *eaſdem baſes habentia cum portionibus, eandemque altitudinem; ſingulorum triangulorum* (A H B, C F B) *relictis portionibus inſcriptorum octuplum eſt triangulum* (A B C) *toti portioni inſcriptum.* Fig. 213.

Nam quia G I. D B [a] :: A I. A B [b] :: 2. 4; & D B. G H [c] :: 4. 3; erit ex æquo G I. G H :: 2. 3; adeóque G I = 2 I H; [d] quare triang I A G = 2 triang H A I; ideóque triang B A D [e] ($\frac{1}{4}$ I A G) = 8 triang I A H. [f] quare triang A B C (2 B A D) = 8 triang A H B. *Q.E.D.*

a 4. 6. b *conſt.* c 19. *hujus.* d 1. 6. e 20. 6. f 15. 5.

Coroll. Triang A H B + C F B = $\frac{1}{4}$ triang A B C.

Prop. XXII.

Fig. 214. *Si ſit portio* (A B C) *comprehenſa ſub recta & parabola, & ſpatia ponantur quotcunque* (X, Y, Z) *deinceps in quadrupla ratione; ſit verò ſpatiorum maximum* (X) *æquale triangulo* (ABC) *baſin habenti eandem cum portione, & altitudinem eandem; ſimul omnia ſpatia minora erunt portione* (ABC).

Portionibus A H B, C F B inſcribantur trigona A H B, C F B portionibus iſtis æquè alta; & altera pari modo reliquis portionibus A P H, C O F; H M B, F N B; conſtátque fore triang A H B + C F B [a] = $\frac{1}{4}$ triang A B C [b] = $\frac{1}{4}$ X = [b] Y; item pariter fore triang A P H + H M B [a] = $\frac{1}{4}$ A H B, & triang C O F + F N B [a] = $\frac{1}{4}$ C F B; [c] adeóque triang A P H + H M B + C O F + F N B = $\frac{1}{4}$ A H B + $\frac{1}{4}$ C F B [d] = $\frac{1}{4}$ Y [b] = Z: ergo quum iſta trigona ſimul omnia deficiant à portione A B C, erunt ſimul X, Y, Z eadem minora.

a *cor.* 21 *huj.*
b *hyp.*
c 12. 5.
d 15. 5.

Prop. XXIII.

D. C. B. A. 64. 15. 4. 1. *Si componantur magnitudines* (D, C, B, A) *deinceps in quadrupla ratione; omnes magnitudines, inſuperque minima* (A) *pars tertia eidem ſummæ adjecta, erunt ſeſquitertia maximæ* (D).

Nam quia D [a] = 4 C, erit $\frac{1}{3}$ D = $\frac{4}{3}$ C = C + $\frac{1}{3}$ C; ſimilitérque $\frac{1}{3}$ C = B + $\frac{1}{3}$ B; & $\frac{1}{3}$ B = A + $\frac{1}{3}$ A; eſt ergo $\frac{1}{3}$ D = C + B + $\frac{1}{3}$ B = C + B + A + $\frac{1}{3}$ A; quare D + C + B + A + $\frac{1}{3}$ A. D :: 1 + $\frac{1}{3}$. 1. *Q.E.D.*

a *hyp.*

Coroll. Hinc, figura portioni inſcripta (juxta 22 hujus) minor eſt quàm $\frac{4}{3}$ trigoni A B C.

Fit enim (ibidem) è magnitudinibus X, Y, Z ∴ in ratione 4 ad 1, quarum maxima X æquatur triangulo A B C.

Scholium.

Liquidiùs id deducatur ex hac univerſali propoſitione.

Sint quotcunque quanta proportionaliter decreſcentia in ratione a ad c; eorum ſit extremum ω, & ſumma dicatur Z; erit $Z = \frac{aa - c\omega}{a - c}$.

Nam

Nam ut primum ad ſecundum, * ita ſunt omnia antecedentia ad omnia conſequentia, hoc eſt $\alpha . \zeta :: Z - \omega . Z - \alpha$; quare (extrema & media in ſe ducendo) eſt $\alpha Z - \alpha\alpha = \zeta Z - \zeta\omega$; & (tranſponendo) $\alpha Z - \zeta Z = \alpha\alpha - \zeta\omega$; & (dividendo utrinque per $\alpha - \zeta$) eſt $Z = \frac{\alpha\alpha - \zeta\omega}{\alpha - \zeta}$. * 12. 5.

Hinc ſi $\alpha, \zeta :: 4. 1$; erit $Z = \frac{4\alpha - \omega}{\alpha}$; ut in hac prop. 23.

Adnotetur autem, quòd ſi progreſſio continuetur ad infinitum, ſcilicet ut ω ſit $= 0$ nihil; tunc evaneſcente termino $\zeta\omega$, liquet fore $Z = \frac{\alpha\alpha}{\alpha - \zeta}$.

Hinc ſi $\alpha . \zeta :: 4. 1$; erit $Z = \frac{4}{3}\alpha$.

Hinc autem breviſſimè conſtat *Archimidea* quadratura; unáque plures innumeræ ſimiliter eliciuntur.

Prop. XXIV.

Omnis portio (A B C) *comprehenſa ſub recta & parabola, ſeſquitertia eſt trianguli* (A B C) *eandem baſin habentis cum ipſa, & altitudinem æqualem.* Fig. 214.

Sit $Z = \frac{4}{3}$ triang A B C; &, ſi fieri poteſt, ſit primò port A B C $\sqsubset$ Z: [a] inſcribatur portioni figura A P H M B N F O C trigonis conſtans, (ut in præcedentibus) ac ita ut ſit port A B C — fig A P H M B N F O C $\sqsupset$ port A B C — Z; eſt ergo Z $\sqsupset$ fig A P H M B N F O C; [b] hæc autem figura minor eſt quàm $\frac{4}{3}$ triang A B C; ergo magis Z $\sqsupset$ $\frac{4}{3}$ triang A B C, contra hypotheſin. [a] cor. 20 *huj.* [b] cor. 23 *huj.*

Sit jam port A B C $\sqsupset$ Z; & concipiatur ſeries magnitudinum (quarum ſumma vocetur S) progrediens in quadrupla ratione, (incipiens utique à triangulo A B C, & decreſcens in ω) [c] ita ut ſit $\omega \sqsupset$ Z — port A B C: cùm igitur ſit $S + \frac{\omega}{3}$ [d] $= Z$; erit $\omega \sqsupset S + \frac{\omega}{3}$ — port A B C; unde liquebit eſſe portionem A B C $\sqsupset$ S. [c] Quod eſt abſurdum. [c] cor. 20. *huj.* [d] 23 *hujus.* [e] 22 *huj.*

Quare potiùs eſt port A B C $= Z = \frac{4}{3}$ triang A B C.

Coroll.

Coroll.

Hinc

1. Si ductâ F G per B ad A C parallelâ compleatur parallelogrammum A G; erit pgr. A G. port. A B C :: 3. 2. Nam pgr A G. triang A B C [a] :: 6. 3; & triang A B C. port A B C [b] :: 3. 4. quare ex æquo pgr A G. port A B C :: 6. 4 :: 3. 2.

a 41. 1.
b 24 *hujus.*

2. Complementum A Y B F est $\frac{1}{2}$ semiportionis A B D.

3. Hinc facilè efficitur quadratum æquale portioni. Nam producatur D B in E, ut sit B E $= \frac{1}{3}$ B D; vel E D $= \frac{4}{3}$ B D; & connectantur E A, E C; liquet trigonum A E C æquari portioni A B C; unde si *fiat trigono A E C æquale quadratum, liquet factum esse.

*14. 2.

4. Itaque facilè ad datam rectam applicatur parabolica portio ad illam scilicet applicato triangulo A E C.

DE

De ÆQUIPONDERANTIBUS,

LIBER SECUNDUS.

Prop. I.

SI duo ſint ſpatia (AB, CD) *contenta ſub rectâ, & parabolâ, *quam poſſumus ad datam rectam applicare; ex utroque ipſorum compoſiti magnitudinis centrum gravitatis* (H) *erit in rectâ connectente ipſorum centra gravitatis* (E, F), *dividens dictam rectam* (E, F), *ut ipſius partes* (EH, FH) *reciprocè eandem rationem habeant cum ſpatiis* (AB, CD). Fig. 216. *cor. 24. de qu. parab.

Accipe FG, FK pares ipſi EH (unde EG = FH), & fiat EL = EG (FH). ad GL applicentur pgr[a] GO, GP [b]utrumvis æquale dimidio AB, & productis OR, PQ compleatur pgr QM. Eſtque parab CD. parab AB [c]:: EH. FH [d]:: 2EH ([e] 2GF). 2FH (2EG) [e]:: GK. GL [f]:: QN. QP [g]:: pgr QM. QO [c] (parab AB) [h] unde parab CD = pgr QM. Cum igitur [k]ſit E centrum pgr[i] QO, & F centrum pgr[i] QM ([e]ob EG = EL, & FG = FK) ſitque QM. QO :: EH. FH; liquet propoſitum.

a 3. ax. 1.
b cor. 24. de qu. parab.
c 6 & 7. 1 de æquip.
d 15. 5.
e conſt.
f 34. 1.
g 1. 6.
h 14. 5.
k 9. 1 de æquip.

Manifeſtum,

Si portioni (ABC) *ſub rectâ, & parabolâ contentum, inſcribatur triangulum* (ABC), *eandem baſim habens cum portione, & æqualem altitudinem; & rurſus reliquis portionibus inſcribantur triangula* (AEB, CFB) *eaſdem baſes habentia cum portionibus, & æqualem altitudinem; & ſemper reliquis portionibus triangula inſcribantur eodem modo* (AME, ESB, CNF, FTB &c); *orta figura* (AMESBTFNC) *portioni evidenter* inſcribi dicatur. Liquet verò, quòd ſic inſcriptæ figuræ angulos connectentes* (ST, EF, MN), *quæque proximè ſunt à vertice portionis* (B), *quæque deinceps parallelæ erunt portionis baſi* (AC), *& biſecabuntur à portionis diametro* (BD); *& diametros ſecabunt in ratiocnes numerorum deinceps imparium, uno dicto illâ* (BY) *quæ ad verticem portionis.* Fig. 217. *Notabiliter, γνωείμως.

Hoc

* *Librum innuit, cui inſcriptum τάξεις, (Ordines vel Series), de quo nihil admodum conſtat.*

Hoc demonſtrandum eſt in *Ordinibus.

a 1. *de qu. par.*
b 4. 6.
c 5. 5. & 7. 5.
d 11. 5.
e 14. 5.
f 4 *de qu. par.*
g 2 *ax.* 1.
h 33. 1.
k *cor.* 19. *de quad. parab.*

Nam (ductis M P, E H, N R, F L diametro parallelis) erit A G = G B; & [b] ideo A H = H L; [a] ſimilitérque A I = I E, ac [b] ideo A P = P H; & ſic porro A D in partes æquales dividetur, & pariter C D in totidem æquales; [c] unde A P = C R. Cùm igitur ſit AP. PO[b] :: AD. DB[b] :: CD. DB :: CR. RQ[d] :: AP. PO. [e] erit RQ = PO. item P O. OM [f] :: D C. D P [e] :: A D. D R [f] :: R Q. Q N [d] :: P O. O M, [e] quare Q N = O M, [g] itaque R N = P M, [h] & M N ipſi A C parallela eſt. Simili diſcurſu E F, & S T ipſi A C parallelæ oſtendentur; [a] unde M V = V N, & E X = X F &c. Denique B D. B X [k] :: 4. 1. Et ſimili modo, B X. B Y :: 4. 1; unde ſi B Y ponatur 1, erit Y X = 3. (B X = 4, B D = 16, X D vel E H = 12) item H G. D B ([b] A H. A D) :: 8. 16. unde E G = 4: ducatur M Z ad A B parallela, & ob E G. E Z [k] :: 4. 1; erit Z G (M O) = 3, & O P ($\frac{1}{2}$ H G) = 4, ergo M P (V D) = 7, & proinde X V (X D — V D) = 5. Ex quibus conſtat de omnibus. *Q. E. D.*

Coroll. 1. E G = F K. unde
2. G K prrallela ad E F.
3. E G = B X = $\frac{1}{4}$ B D.

Prop. II.

Fig. 218. *Si verò portioni* (A B C) *comprehenſa ſub recta, & rectanguli coni ſectione rectilineum* (A M E S B T F N C) *evidenter inſcribatur, inſcripti centrum gravitatis erit in portionis diametro* (B D).

a *lemm. præc.*
b 15, & 13. 1 *de aquip.*
c 7 *cor.* 7. 1 *de aquip.*

Nam connectantur anguli rectis M N, E F, S T, [a] hæ parallelæ ſunt baſi A C, & biſecantur à diametro B D; [b] quare trapeziorum A N, M F, E T, & trigoni S B T ſingula centra gravitatis ſunt in diametro B D. [c] ergo & compoſiti ex his centrum gr. eſt in eadem. *Q. E. D.*

Lemma.

Fig. 219. 220. Sint trapezia D E, *de*, & M G, *mg*, in quibus D M. M N :: *dm. mn.* & D A. M E :: *da. me.* Atque M E. N G :: *me. ng.* erit trap. D E. M G :: trap *de. mg.*

Producantur A E P, E G O, *aep*, *ego*, ut occurrant ipſis D N, *dn.*

Eſtque

Eſtque P D. P M [a]:: D A. M E [b]:: *da. me* [a]:: *pd. pm* [c]:: P D. P M. ergo dividendo P M. M D :: *pm. md.*, [b] item M D. M N :: *md. mn.* ergo ex æquo P M. M N :: *pm. mn*; item ob M E. N G [b] :: *me. ng*; [a] erit M N. M O :: *mn. mo.* ergo rurſus ex æquo P M. O M :: *pm. om*; [d] hoc eſt triang P M E. O M E :: triang *pme. ome.* item triang O M E. O N G [e] = M E. N G, bis [b] = *me. ng*, bis [e] = triang *ome. ong*; ergo permutando triang O M E. *ome* :: triang O N G. *ong* [f]:: trap M G. *mg*; & rurſus permutando triang O M E. trap M G :: triang *ome.* trap *mg*; ergo ex æquali triang P M E. trap M G :: triang *pme.* trap *mg*; quinimò ſimiliter trap D E. triang P M E :: trap *de.* triang *pme*; ergo denuo ex æquo trap D E. M G :: trap *de. mg. Q.E.D.*

a 4. 6. b *hyp.* c 11. 5. d 1. 6. e 20. 6. f 19. 5.

Coroll. Trap D E. triang O M E *:: trap. *de.* triang *ome.* * 22. 5.

Lemma 2.

Si A. B :: D. E. & A. C :: D. F. Erit B. C :: E. F. & A. B + C :: D. E + F. Fig. 221.

Nam permutando B. E (A. D) :: C. F. & rurſus permutando B. C E. F. Item B + C. E + F [a]:: (B. E ::) A. D. ergo permutando A. B + C :: D. E + F.

a 12. 5.

Quòd ſi ſit A. B + C :: D. C + F; & A. B :: D. E. erit B. C :: E. F. & A. C :: D. F. Item ſi fuerit B. C :: E. F. & A. B + C :: D. E + F. Erit A. B :: D. E. & A. C :: D. F. Quæ ex ſimili rationum permutatione, inverſione &c. facilè eliciuntur.

Prop. III.

Si duarum portionum *ſimilium (a B C, abc) ſub recta, & parabola comprehenſarum, utrique rectilineum inſcribatur evidenter; habeant verò inſcripta rectilinea latera mutuò æqualia multitudine, centra gravitatum (Y, y) ſimiliter ſecant diametros portionum (B D, bd).* Fig. 222. 223. * Not.

Angulos connectant rectæ E F, G H, K L, *ef, gh, kl*; ſintque Q, R centra trapeziorum A F, E H, & S compoſiti ex illis A H; & ſimiliter *q, r, s* ſint centra ipſorum *af, eh, ah*: item ſit X centrum compoſiti ex trapezio G L, & trigono K B L, & *x* ipſius *gl* + triang *kbl.* Jam ob A Dq. E Mq [a]:: B D. B M [b] :: *bd. bm* :: *adq. emq*; erit A D. E M ([c] A C. E F) :: *ad. em* ([c] *ac. ef*). [d] ergo 2 A C + E F. 2 E F + A C :: 2 *ac* + *ef*. 2 *ef* + *ac*. hoc eſt M Q. Q D :: *mq. qd*; ergo com-

a 3 *de quæſt.* b *hyp.* & *manif. hujus.* c 15. 5. d 15. & 18. 5.

componendo M D. Q D :: *md. qd.* item B D. M D :: *bd. md.* itaque ex æquo B D, Q D :: *bd. qd*; paritérque B D. Mq :: *bd mq.* Simili discursu B D. R M :: *bd. rm*; quare B D. R Q :: *bd. rq.* Item R S. S Q :: trap A F. E H :: trap *af. eh* :: *rs. sq.* ergo ex æquo B D. S Q :: *bd sq*; & proinde B D. S D :: *bd. sd.* Simili discursu B D. B X :: *bd bx*; & proinde B D. X S :: *bd. xs.* Quia verò trap A F. E H :: *af. eh.* erit componendo A H. E H :: *ab. eh.* Item trap E H. G L :: *ah. gl.* & trap G L. triang K B L :: *gl. kbl.* ergo ex æquo A H. G L :: *ah. gl.* & A H. K B L :: *ah. kbl.* & idcirco A H. G L + K B L (X Y. Y S) :: *ah gl* + *kbl.* (*xy* . *ys*). & cùm priùs fuerit B D. X S :: *bd. xs*; erit B D. X Y :: *bd. xy*; ideóque etiam B D. B Y :: *bd. by*; & B D. Y D :: *bd. yd.* ac denique dividendo B Y. Y D :: *by. yd.* *Q.E.D.*

e 15. 1. *æquip.*
f 12. 5.
g 6 & 7 1 *æquip.*
h 1. *lem.* 2 *hujus.*
k 2. *lem.* 2 *hujus.*
l *cor.* 1 *lem.* 2 *hujus.*

Nota. Portionum similitudinem intelligit hic Author, non strictissimam, at latiore sensu, juxta quem omnia triangula, & omnes figuræ Analogicæ (in quibus nempe si diametri à vertice proportionaliter dividantur, per divisiones ductæ ordinatæ proportionales fiunt) sibimet assimilari dicantur; unde quævis duo parabolica segmenta similia esse supponit hic discursus; id quod probè, quò scrupuli tollantur, animadversum oportet.

Prop. IV.

Fig. 224. *Omnis portionis* (A B C) *comprehensa sub rectâ, & parabola, centrum gravitatis est in portionis diametro* (B D).

Si neges, esto E centrum portionis extra B D; ducatur E F ad B D parallela; sitque C F. F D :: C A. G A :: triang C B A. triang G B A. tum portioni inscribatur figura evidens (quæ vocetur X), ita ut port A B C — X ⊐ triang G B A. Inscriptæ autem figuræ centrum sit H, & connexæ H E occurrat C K ad B D parallela. Estque X port A B C — X ⊏ triang A B C. port A B C — X ⊏ triang A B C. A B G (:: C F. D E :: K E. H E.) Sit M E. H E :: X. port A B C — X; quare M E, H E ⊏ K E. H E; & ideo M E ⊏ K E, & M centrum reliquarum portionum erit extra sectionem. *Q.E.A.*

a 1. 6.
b *cor.* 20. *de quad. parab.*
c 2 *hujus.*
d 8. 5.
e *prius.*
f 10. 5.
g 8. 1. *de æqu.*
h 9 *post.* 1. *æqu.*

Coroll. Hinc si ex tota portione auferatur trigonum A B C, centrum reliquarum portionum est in B D, & sic porro, ablatis aliis trigonis figuræ inscriptæ.

Lemma.

t.

225.

. 1. de

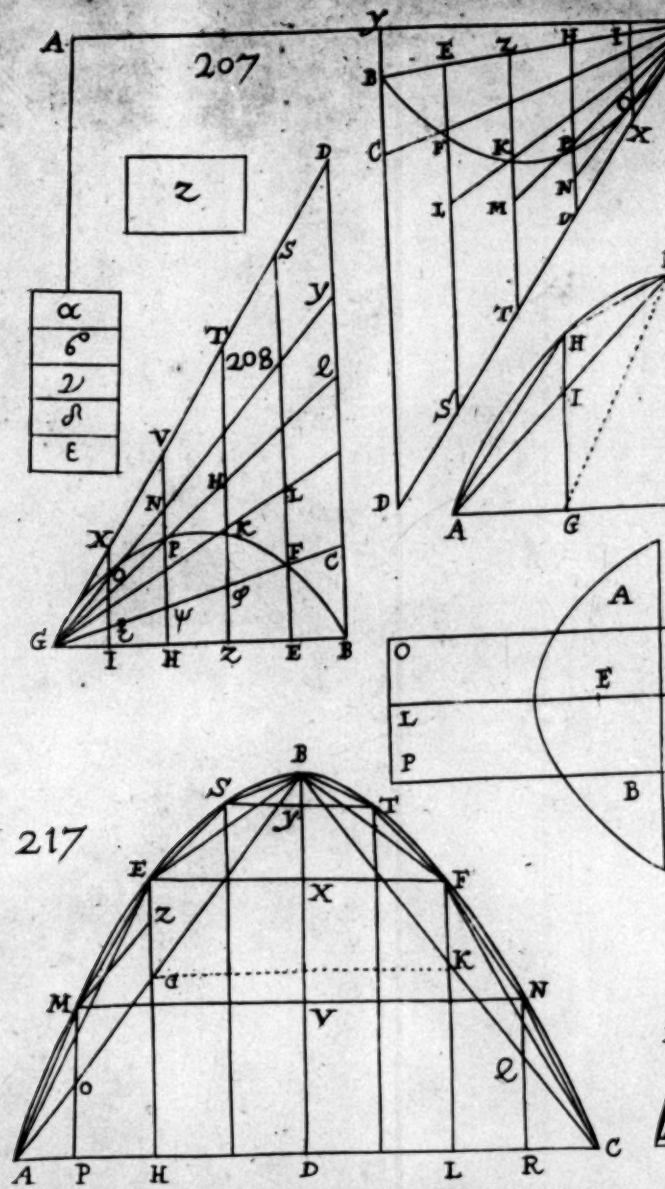
ujus.

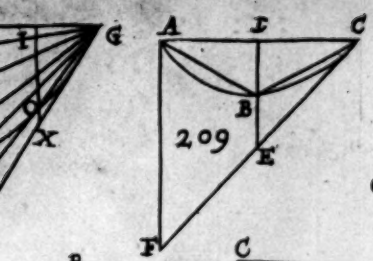
4. 1 de

1 de

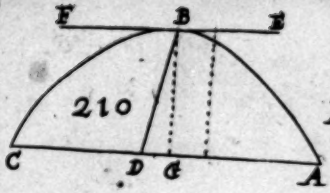
ac.

6.


207
208
217

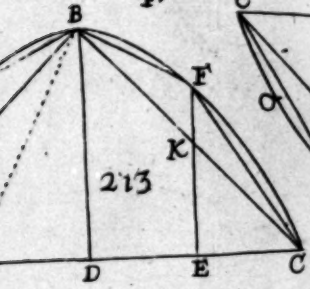

G
X

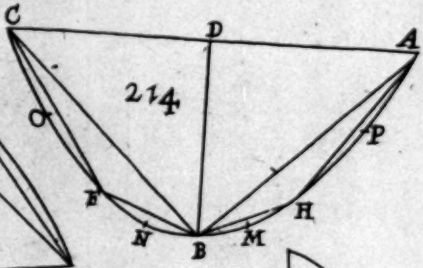
A
E
C
B
209
F

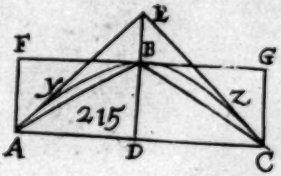

F
B
E
210
C
D
G
A

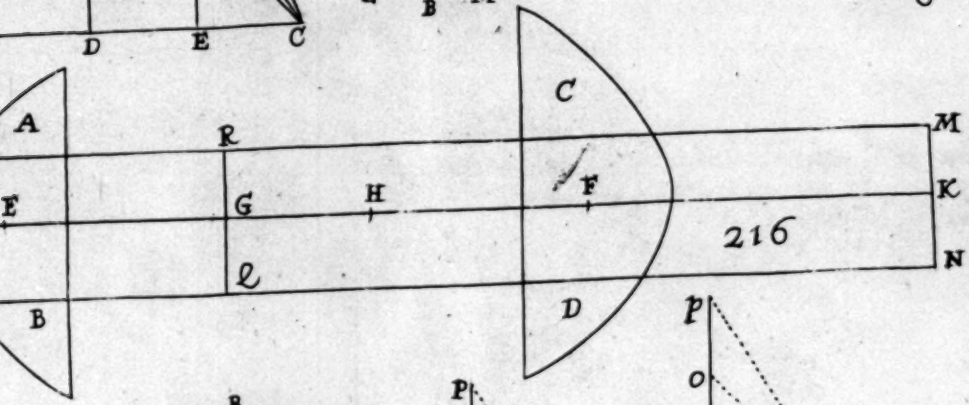
B
K
G
211
A
F
D
C

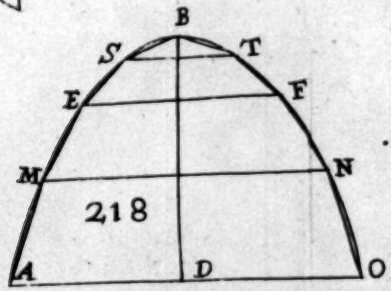
B
E
G
H
F
212
A
D
C

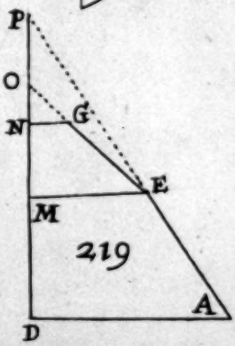

B
F
K
213
D
E
C

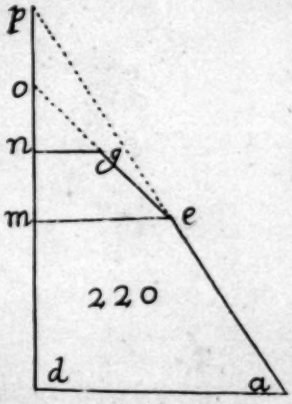

C
D
A
214
O
P
F
N
B
M
H


E
F
B
G
y
z
215
A
D
C


A
R
C
M
E
G
H
F
K
216
N
ℓ
B
D


B
S
T
E
F
M
N
218
A
D
O


P
O
N
G
E
M
219
A
D


p
o
n
g
m
e
220
d
a

C

e 15.1.
f 12. 5.
g 6 & 7
quip.
h 1.lem.
k 2.lem.
l cor.1
bujus.

Fig.

a 1.
b
q
c 2
d 8.
e pr
f 1
g 8.
h 9

Lemma.

Si L R. R P ⊏ L S. S P erit L R ⊏ L S.

[a]Nam componendo L P. R P ⊏ L P. S P. [a]ergo R P ⊐ S P. & proinde L R ⊏ L S. [a] 10. 5.

Inversè, si L R ⊏ L S. erit L R. R P ⊏ L S. S P.

Nam L R. R P [b]⊏ L S. R P [b]⊏ L S. S P. [b] 8. 5.

Prop. V.

Si portioni (A B C) *comprehensæ sub rectâ, & parabolâ, inscribatur rectilineum* (A E B F C) *evidenter, totius portionis centrum gravitatis* (S) *propius est vertici portionis* (B), *quàm inscripti rectilinei centrum* (R). Fig. 225.

Sit P centrum trigoni A B C, & reliquarum portionum A E B, C F B centra sint M, N; trigonorum verò A E B; C F B centra sint I, K, & connectantur M N, I K, G H; liquet O esse centrum port A E B + C F B. (quia hoc est in utraque [a]M N, [b]B D), & L esse centrum triang A E B + C F B; & quia A G = ½ A B, & C H = ½ C B, [c] erit D Q = ⅓ D B; & D P ([d]⅓ D B) ⊐ D O; unde D P ⊐ D S (nam S [a]cadit inter O, P). Simili discursu I G ⊐ M G; quare L P ⊐ O P: cùm itaque sit L R. R P [e]:: triang A B C. triang A E B + C F B. [f]⊏ triang A B C. port A E B + C F B [e]:: O S S P [f]⊏ L S. S P. [g] erit L R ⊏ L S; quare S est propius vertici B. *Q. E. D.*

[a] 6 *cor* 7. 1. *de aquip.*
[b] *cor.* 4. *hujus.*
[c] 2. 6.
[d] 3 *cor.* 14. 1 *de aquip.*
[e] 6 & 7. 1 *de aquip.*
[f] 8. 5.
[g] *lemm præc.*

Coroll. Similiter, quò figura inscripta plura habet latera, eò centrum ejus propiùs ad verticem accedet.

Prop. VI.

Datâ portione (A B C) *comprehensa sub rectâ, & parabolâ, possibile est portioni rectilineum* (A E B F H) *evidenter inscribere, ita ut rectâ* (S R), *quæ est inter centra gravitatum portionis, & inscripti rectilinei minor sit quâcunque rectâ propositâ* (Z). Fig. 226.

Sit B S. Z :: triang A B C. X; & [a]inscribatur figura (A E B F C) evidenter (cujus centrum R), ita ut port A B C — fig A E B F C ⊐ X. Dico factum.

[a] *cor.* 20 *de qu. par.*

Si fieri potest, sit S R ⊏ } = } Z. éstque port A B C. port A B C —

b 8. 5. c hyp. fig A E F B C [b] ⊏ triang A B C. X [c] :: B S. Z. ⊏ = } B S. S R. itaque

si ponatur port A B C port A B C — fig A E B F C :: T S. S R, erit

d 8. 1 de æqu. T S ⊏ B S; & T [d] centrum portionum reliquarum demptâ figurâ A E B F C erit extra B D, contra coroll. 4 hujus.

Brevius. Quo figura inscripta plura habet latera, eò propiùs accedet ad verticem; proinde ad centrum ferè accedet, ex continuo laterum augmento.

Prop. VII.

Fig. 227. Fig. 228. *Duarum similium portionum* (A B C, M N O) *comprehensarum sub recta, & parabola, centra gravitatum* (E, Q) *in eâdem ratione secent diametros* (B D, N P).

Si negas, esto B H. H D :: N Q. Q P (ita nempe primò ut H cadat infra E). Portioni A B C [a] inscribatur figura A F B G C, cujus centrum G, ita ut E G ⊐ E H, & huic *similis figura inscribatur portioni M N O, cujus centrum sit T: & ob N Q. Q P ([b] :: B H. H D)

a 6. hujus. * Not. b hyp. c lemm. ad 4 b. d 3 hujus. [c] ⊏ (B G. G D [d] ::) N T. T P; [c] erit N Q ⊏ N T, contra 5 hujus.

Quod si dicas esse B K. K D :: N Q. Q P; & K cadere supra E; fiat N X. X P :: B E. E D [c] ⊏ B K. K D :: N Q. Q P. [c] ergo N X ⊏ N Q; sic relabimur in primam hypothesin, quam absurdam demonstravimus.

Aliter brevius. Cùm centra similium figurarum inscriptarum, si laterum numerus augeatur infinitè, in centra portionum desinant, & illarum centra proportionaliter dividant diametros, harum centra idem efficient.

* *Not.* Similes dicuntur inscriptæ segmentis figuræ, non juxta strictam illam, quæ initio sexti elementi definitur, similitudinem, sed propter similem inscribendi modum, qualis in appositio ad primam hujus manifesto, & in 21ª *de quadr. parab.* describitur; quæ certè similitudo huic fundando ratiocinio sufficit. vid *Not.* ad 3 hujus.

Prop. VIII.

Fig. 229. *Cujuscunque portionis* (A B C) *sub recta, & parabola contenta centrum gravitatis* (H) *dividit portionis diametrum* (B D), *ita ut pars ejus* (B H), *quæ ad verticem, sesquialtera sit partis* (H D) *quæ ad basim.*

Portioni inscribatur figura evidens A K B L C, & portionum A K B, C L B centra sint M, N; ac E centrum trigoni A B C; ducantur

cantur KL, MN, FG, ſitque SX = $\frac{1}{3}$ BS = $\frac{1}{12}$ BD (ob BS[a] = $\frac{1}{4}$ BD). unde BX (BS + SX) = $\frac{1}{4}$ BD + $\frac{1}{12}$ BD = $\frac{1}{3}$ BD. Item ED[b] = $\frac{1}{3}$ BD; ergo XE = $\frac{1}{3}$ BD. Porro ob BD = 4KF [c]erit BH = (4KM =) 4SQ; ergo (ſublatâ SQ) eſt BS + QH = 3SQ = 3SX(BS) + 3XQ; ergo QH = 3XQ. atqui 3. 1 [e]:: triang ABC. port AKE + CLB [f]:: QH. HE. [g]ergo XQ = HE; unde XE (BX, vel DE) = 5HE; & XH = 4HE, & HD = 6HE. Liquet igitur fore BH. HD :: 9. 6 :: 3. 2. *Q. E. D.*

a *manif. hujus.*
b 3 *cor.* 14 *huj.*
c 7 *hujus.*
d *conſt.*
e 24. *de qu. par.*
f 6. *& 7. 1 æqu.*
g 9. 5.

Coroll. BD. HD :: 15. 6 :: 5. 2.
BD. BH :: 15. 9 :: 5. 3.
BD. HE :: 15. 1.

Lemma.

Quotlibet AB, CB, DB, EB ÷÷; erunt exceſſus AC, CD, DE etiam ÷÷ in eadem ratione. Nam ob AB. CB :: CB. DB, erit diviſim AC. CB :: CD. DB; & permutatim AC. CD :: CB. DB; item ob CB. DB :: DB. EB; erit diviſim CD. DB :: DE. EB; permutandoque CD. DE :: DB. EB :: CB. DB. unde liquet fore AC, CD, DE ÷÷ in ratione CB ad DB, vel AB ad CB.

Coroll. AD. DE :: AB + CB. DB :: CB + DB. EB, &c. 12, 16, 18, 5.

Prop. IX.

Si quatuor lineæ (AB, CB, DB, EB) *proportionales ſint in continua proportione; & quam rationem habet minima ad exceſſum, quo maxima excedit minimam, hanc habens ſumatur aliqua ad tres quintas exceſſus, quo maxima proportionalium excedit tertiam; quam verò habet rationem æqualis duplæ maxima proportionalium, & quadruplæ ſecunda, & ſextuplæ tertiæ, & triplæ quartæ ad æqualem quintuplæ maximæ, & decuplæ ſecundæ, & decuplæ tertiæ, & quintuplæ quartæ, hanc habens accipiatur quædam ad exceſſum, quo maxima proportionalium excedit tertiam; ſimul ambæ ſumptæ erunt duæ quintæ ipſius maximæ.* Fig. 230.

Sit EB. AE :: FG. $\frac{1}{3}$ AD; item 2AB + 4CB + 6DB + 3EB. 5AB + CB + 10DB + 5EB :: GH. AD; dico fore AB. FH :: 5. 2.

Nomi-

Nominentur $L = 2AB + 4CB + 6DB + 3EB$
$M = 5AB + 10CB + 10DB + 5EB.$
$Q = 2AB + 4CB + 2DB.$
$R = 2AB + 4CB + 4DB + 2EB.$
$S = 2DB + EB.$
$T = CB + 3DB + 2EB.$
$V = 2AB + 3CB + DB.$
$X = AC + 3CD + 2DE.$

a cor. lemm. prac. Ob $AB + CB. DB$ a :: $AD. DE$; b erit $2AB + 2CB. 2DB$ :: ($AD. DE$ a ::) $CB + DB. EB$. c quare $V. S :: AD. DE$: fiat
b 15. 5. $AD. DO :: R. S$; quare inversè componendo erit $AO. AD :: R + S. R$; (hoc est $L. R$); item $AD. GH :: M. L$; ergo ex æquo per-
c 12. 5. turbatè est $AO. GH :: M. R$ b :: 5. 2. Porro, ob $DO. AD :: S. R$;
d *prius*. & $AD. DE$ d :: $V. S$; erit rursus ex æquo perturbatè $DO. DE :: V. R$; quare inversè convertendo $T (R - V). R :: OE. DE$; item
e cor. prac. $AC. CB$ e :: $DE. EB$ e :: $CD. DB$ e :: $3CD. 3DB$ e :: $2DE. EB$;
e adeóque $X. T :: DE. EB$; ergo iterum ex æquo perturbatè $OE. EB :: X. R$; componendóque $OB. EB :: X + R. R$; e item $AC + CD. DE :: AB + CB. DB :: CB + DB. EB :: AB + 2CB + DB. DB + EB$; ergo inversè componendo $AE. AD :: AB + 2CB + 2DB + EB. AB + 2CB + DB$ c :: $R. Q$.
f 16, & 15. 5. f ergo $R. \frac{1}{2}Q :: AE. \frac{1}{2}AD$ g :: $EB. FG$; erat verò prius $X + R. R :: OB. EB$; ergo ex æquo $OB. FG :: X + R. \frac{1}{2}Q$ (hoc est ::
g hyp. $3AB + 3DB + 6CB. \frac{1}{2} : 2AB + 2DB + 4CB$) b :: 5. 2 : atqui fuit $AO. GH :: 5. 2$; quare e junctim $AB. FG :: 5. 2$. *Q.E.D.*

Hæc conclusio sic operosè monstrata, poterit ita per operationes Algebraicas expeditiùs & liquidiùs ostendi.

Sicut $a, b, c, d \div\div$; & $d. a - d :: y. \frac{3a - 3c}{5}$ (quare $y = \frac{3ad - 3cd}{5a - 5d}$); & $2a + 4b + 6c + 3d. 5a + 10b + 10c + 5d :: z. a - c$ (quare $z = \frac{2aa + 4ab + 4ac + 3ad - 4bc - 6cc - 3cd}{5a + 10b + 10c + 5d}$).

Est ergo (summas istas conjungendo, fractionésque, quibus constant, ad eandem denominationem redigendo) $y + z =$

$$\frac{aaa + 20aab + 20aac + {}^{*}20aad + 10abd - 20abc\ ({}^{*}-20aad) - 30acc\ (-30abd) - 20acd - 10bcd\ {}^{*}(10add)}{25aa + 50ab + 50ac - 50bd - 505d - 25dd}$$

* ob $bc = ad$
* ob $cc = bd$.

$$\frac{10aaa + 20aab + 20aac - 20abd - 20acd - 10add}{25aa + 50ab + 50ac - 50bd - 50cd - 25dd} = \tfrac{2}{5}a.$$ (quod

ebit, hujus æquationis partem utramque multiplicando per 5, & idendo per 2, vel multiplicando per crucem). itaque constat.

Lemma.

In parabola A B C, sint A C, D E ordinatim applicatæ ad diame- m B F; erunt portiones A B C, D B E inter se, ut cubi semibasi- F A, G D. Fig. 231.

Nam, connexis B A, B C, B D, B E; est port A B C. D B E [a]:: ng A B C. D B E [b] :: triang B F A. triang B G D [c] = F A. G D BF. B G = F A. G D + [d] F Aq. G Dq [e] = F A cub. G D cub. E.D.

a 24 *de quad. par.* & 15. 5.
b 15. 5.
c 23. 6.
d 3. *de qu. par.*
e 5. *def.* 6.

Prop. X.

Omnis frusti (A D E C) *à parabolico segmento ablati centrum gra- atis est in recta* (G F), *quæ diameter est frusti, hoc modo positum, isectâ rectâ* (G F) *in quinque partes* (G L, L H, H K, K P, P F) *media quinta parte* (H K); *ut ejus particula propior minori basi fru- ad reliquam partem eandem habeat rationem, quam habet solidum, in quidem habens quadratum quod ex majore basium frusti, altitu- em verò æqualem utrique simul & duplæ minoris basis & majori, ad idum, basin quidem habens quadratum minoris basis frusti, altitudi- verò æqualem utrique & duplæ majoris basis & minori ipsarum.* Fig. 231.

Dico si fuerit H I. I K :: 2 D E + A C × A Cq. 2 A C + D E × Eq; fore punctum I centrum gr. frusti A D E C.

Sint F B, Y B, G B, Z B ÷÷ ; & [b] fiat F H. I R :: F Z. Z B; éstque q. Y Bq [c] :: F B. G B [d] :: A Fq. DGq; unde F B. Y B :: AF. DG. n F B cub. Y B cub [e] (F B. Z B) :: A F cub. D G cub; [f] :: port B C. D B E; ergo dividendo F Z. Z B ([g] id est F H. I R) :: frust D E C. D B E. Porro, D E. A C [h] (D G. A F) [k] :: Y B. F B. [l] qua- D E. A F :: Y B. $\frac{1}{2}$ F B; & componendo D E + A F. A F :: B + $\frac{1}{2}$ F B. $\frac{1}{2}$ F B. & D E + A F. A C. [m] (hoc est, D E + AF A Cq. A C cub) [l] Y B + $\frac{1}{2}$ F B. F B. Item A C cub: D E cub [n] ::

a 13, & 11. 6.
b 12. 6.
c 20. 6.
d 3. *de qu. par.*
e 33. 11.
f *lemm. præc.*
g *const.*
h 15. 5.
k *priùs.*
l 16, & 15. 5.
m 32. 11.
n *priùs. et* 15. 5

F B

Nominentur $L = 2AB + 4CB + 6DB + 3EB$
$M = 5AB + 10CB + 10DB + 5EB.$
$Q = 2AB + 4CB + 2DB.$
$R = 2AB + 4CB + 4DB + 2EB.$
$S = 2DB + EB.$
$T = CB + 3DB + 2EB.$
$V = 2AB + 3CB + DB.$
$X = AC + 3CD + 2DE.$

a *cor. lemm. prac.* Ob $AB + CB.DB$ a :: $AD.DE$; b erit $2AB + 2CB.2DB$
($AD.DE$ a ::) $CB + DB.EB$. c quare $V.S :: AD.DE$: fi
b 15. 5. $AD.DO :: R.S$; quare inversè componendo erit $AO.AD :: R-$
c 12. 5. $S.R$; (hoc est $L.R$); item $AD.GH :: M.L$; ergo ex æquo pe
turbatè est $AO.GH :: M.R$ b :: 5. 2. Porro, ob $DO.AD :: S.R$
d *prius.* & $AD.DE$ d :: $V.S$; erit rursus ex æquo perturbatè $DO.DE$
$V.R$; quare inversè convertendo T (R—V). $R :: OE.DE$; itet
e *cor. prac.* $AC.CB$ e :: $DE.EB$ c :: $CD.DB$ c :: $3CD.3DB$ c :: $2DE.EB$
c adeóque $X.T :: DE.EB$; ergo iterum ex æquo perturbatè OE
$EB :: X.R$; componendóque $OB.EB :: X + R.R$; c item AC
$+ CD.DE :: AB + CB.DB :: CB + DB.EB :: AB +$
$2CB + DB.DB + EB$; ergo inversè componendo $AE.AD$
$AB + 2CB + 2DB + EB.AB + 2CB + DB$ e :: $R.C$
f 16, & 15. 5. f ergo $R. \frac{1}{3}Q :: AE. \frac{1}{3}AD$ g :: $EB.FG$; erat verò priùs $X + 1$
g *hyp.* $R :: OB.EB$; ergo ex æquo $OB.FG :: X + R. \frac{1}{3}Q$ (hoc est
$3AB + 3DB + 6CB. \frac{1}{3} : 2AB + 2DB + 4CB$) b :: 5. 2 : 2
qui fuit $AO.GH :: 5. 2$; quare e junctim $AB.FG :: 5. 2$. *Q.E.I*

Hæc concluſio ſic operosè monſtrata, poterit ita per operatior
Algebraicas expeditiùs & liquidiùs oſtendi.

Sicut $a, b, c, d \div\div$; & $d.a - d :: y. \frac{3a - 3c}{5}$ (quare y
$\frac{3ad - 3cd}{5a - 5d}$); & $2a + 4b + 6c + 3d.5a + 10b + 10c +$
$:: z.a - c$ (quare $z = \frac{2aa + 4ab + 4ac + 3ad - 4bc - 6cc - 3c}{5a + 10b + 10c + 5d}$

Eſt ergo (ſummas iſtas conjungendo, fractionéſque, quibus c
ſtant, ad eandem denominationem redigendo) $y + z$
10

$$\frac{10aaa+10aab+20aae+*10aad+10abd-20abc\ (*-20aad)\ -30ace\ (-20abd)\ -20acd-10bcd\ *(10add)}{25aa+50ab+50ac-50bd-50cd-25dd}$$

* ob $bc = ad$
* ob $ee = bd$.

$$= \frac{10aaa+20aab+20aac-20abd-20acd-10add}{25aa+50ab+50ac-50bd-50cd-25dd} = \frac{2}{5}a.$$ (quod patebit, hujus æquationis partem utramque multiplicando per 5, & dividendo per 2, vel multiplicando per crucem). itaque constat.

Lemma.

In parabola A B C, sint A C, D E ordinatim applicatæ ad diametrum B F; erunt portiones A B C, D B E inter se, ut cubi semibasium F A, G D. Fig. 231.

Nam, connexis B A, B C, B D, B E; est port A B C. D B E [a] :: triang A B C. D B E [b] :: triang B F A. triang B G D [c] = F A. G D + B F. B G = F A. G D + [d] F Aq. G Dq [e] = F A cub. G D cub. *Q. E. D.*

a 24 *de quad. par.* & 15. 5.
b 15. 5.
c 23. 6.
d 3. *de qu. par.*
e 5. *def.* 6.

Prop. X.

Omnis frusti (A D E C) *à parabolico segmento ablati centrum gravitatis est in rectâ* (G F), *quæ diameter est frusti, hoc modo positum, æquisectâ rectâ* (G F) *in quinque partes* (G L, L H, H K, K P, P F) *in media quinta parte* (H K); *ut ejus particula propior minori basi frusti ad reliquam partem eandem habeat rationem, quam habet solidum, basin quidem habens quadratum quod ex majore basium frusti, altitudinem verò æqualem utrique simul & duplæ minoris basis & majori, ad solidum, basin quidem habens quadratum minoris basis frusti, altitudinem verò æqualem utrique & duplæ majoris basis & minori ipsarum.* Fig. 231.

Dico si fuerit H I. I K :: 2 D E + A C * A Cq. 2 A C + D E * D Eq; fore punctum I centrum gr. frusti A D E C.

Sint F B, Y B, G B, Z B ÷÷ : & [b] fiat F H. I R :: F Z. Z B; estque F Bq. Y Bq [c] :: F B. G B [d] :: A Fq. D Gq; unde F B. Y B :: AF. DG. item F B cub. Y B cub [e] (F B. Z B) :: A F cub. D G cub; [f] :: port A B C. D B E; ergo dividendo F Z. Z B ([g] id est F H. I R) :: frust A D E C. D B E. Porro, D E. A C [h] (D G. A F) [k] :: Y B. F B. [l] quare D E. A F :: Y B. $\frac{1}{2}$ F B; & componendo D E + A F. A F :: Y B + $\frac{1}{2}$ F B. $\frac{1}{2}$ F B. & D E + A F. A C. [m] (hoc est, D E + A F * A Cq. A C cub) [n] Y B + $\frac{1}{2}$ F B. F B. Item A C cub: D E cub [n] ::

a 13, & 11. 6.
b 12. 6.
c 20. 6.
d 3. *de qu. par.*
e 33. 11.
f *lemm. prac.*
g *constr.*
h 15. 5.
k *prius.*
l 16, & 15. 5.
m 32. 11.
n *prius. et* 15. 5.

F B

FB. ZB; dein DE. AC [o] (YB. FB) :: ZB. GB; ergo DG. AC :: ½ ZB. GB; componendóque DG. AC + DG :: ½ ZB. GB + ½ ZB; [l]unde DE. AC + DG [m](DE cub. AC + DG × DEq) :: ZB. GB + ½ ZB: quapropter ex æquo erit DE + AF × ACq. AC + DG × DEq [n] (hoc est 2DE + AC × ACq. 2AC + DE × DEq; [s]hoc est HI. IK) :: YB + ½ FB. GB + ½ ZB; & componendo HK. IK :: YB + ½ FB + GB + ½ ZB. GB + ½ ZB [n] :: 2YB + FB + 2GB + ZB. 2GB + ZB. unde (antecedentes quintuplicando) FG. IK :: 5TB + 5ZB + 10YB + 10GB. 2GB + ZB. Item FG. FK [p] (:: 5. 3.) :: [h] 5FB + 5ZB + 10YB + 10GB. 2FB + 2ZB + 4YB + 4GB; ergo (jungendo consequentes duarum proportionum (FG. IF :: 5FB + 5ZB + 10YB + 10GB. 2FB + 3ZB + 4YB + 6GB; vel inversè IF. FG :: 2FB + 4YB + 6GB + 3ZB. 5FB + 10YB + 10GB + 5ZB; Item IR. FH ([p] ⅓ FG) [s] :: ZB. FZ; [r]ergo RF (IF + IR) = ⅔ FB; proindéque BR = ⅓ FB; adeóque BR. RF :: 3. 2; [s]unde punctum R est centrum gr. portionis ABC: sit Q centrum portionis DBE; itaque BQ. QG :: 3. 2; vel compositè BG. BQ :: 5. 3 :: BF. BR [t] :: FG. QR :: 5. 3 [p] :: FG. FH; [u] unde QR = FH; itaque demum [x] est QR. IR :: frust ADEC. port DBE; [y] quare punctum I est centrum gr. frusti ADEC. *Q.E.D.*

o 11. 5.
p *hyp.*
r 9 *hujus.*
s 8 *hujus.*
t 19. 5.
u 9. 5.
x *supr. cum* 7, & 11. 5.
y 6, & 7. 1 *æquip.*

D E

De Insidentibus Humido. Lib. I.

Tractatus hic injuriâ temporis mutilus evaſit, nec Græcè extat; Latinam verſionem perpolivit Federicus *ille* Commandinus, *de literis hiſce optimè meritus, quem ſequimur* κατ' ἀξίαν. *Inſcriptionem fuiſſe* περὶ τῶν ὀχουμένων *diſcimus ex* Strabone; *id eſt de iis quæ vehuntur, geſtantur, feruntur, ſuſtinentur, continentur, vel inſident Humido; hæc enim omnia ſignificat* τὸ ἐχέσθαι. *Agit verò de Humidi naturâ, figurâ, quatenus admittit corpora, vel attollit, quantâque vi reſiſtit; quoſitu in humido conſiſtit, vel movetur portio ſphæræ, quoque portio conoidis rectanguli, vel parabolici.*

Hypoth. I.

*Ponatur humidi eam eſſe naturam, ut partibus ipſius æqualiter jacentibus, & continuatis inter ſeſe, minus preſſa à magis preſſa expellatur: unaquæque autem pars ejus premitur humido ſupra ipſam exiſtente ad perpendiculum, ſi humidum * ſit deſcendens in aliquo, aut ab alio aliquo preſſum*

* *ſubſidat in uno, & ab alio prematur.*

Schol.

Ratio eſt, quia deſuper incumbens pondus partibus humidi proximè ſubjectis motum ſive conatum imprimit, & hæ ſequentibus continuò ad fundum uſque; ibi vero, quum ob præpotentem fundi reſiſtentiam progredi nequeat motus, reflectitur, & in latera ſe diffundens, adjacentes humidi partes conturbat, atque extrudit. Ex g pondus A (in fig. appoſitâ) premens ſubjectas humidi partes B, motum ipſis communicat, efficitque, ut à fundo C, ad modum inepto, ad partes Fig. 233.

tes D, E resiliant, locúmque cedant deorsum nitenti corpori A. Ita mihi videtur accipienda, & explicanda hæc hypothesis.

Prop. I.

Fig. 234. *Si superficies aliqua plano secetur, per idem semper punctum* (A) *sitque sectio* (B C) *circuli circumferentia, centrum habens punctum illud* (A), *per quod plano secatur, sphæræ superficies erit.*

Nam ab A ad superficiem ducantur rectæ A B, A C utcunque, per quas transit planum; hoc in dicta superficie [a] producet circuli circumferentiam, cujus centrum A. [b]ergo A B, A C æquales erunt. Simili discursu omnes rectæ ab A ad superficiem ductæ æquales erunt. [c]quare superficies proposita est sphærica. *Q.E.D.*

a *hyp.*
b 15. *def.* 1.
c 1 *def.* 17 *book.*

Prop. II.

Fig. 235. *Omnis humidi consistentis, atque manentis superficies sphærica est, cujus sphæræ centrum est idem quod centrum terræ.*

Centrum terræ sit A. Per hoc secetur humidum plano quocunque, in quo ab A ad superficiem humidi ducantur utcunque rectæ AB, AC. Hæ si pares fuerint, [a]liquet B C esse circumferentiam circuli, & [b]proinde superficiem humidi esse sphæricam. Sin impares dixeris, centro A intra humidum ducatur arcus D E. ergo B D, C E [c]impares sunt, & inæqualiter premunt sibi subjectas humidi partes; [d]unde non consistet humidum, sed conturbabitur, contra hypothesin.

a 15. *def.* 1.
b 1 *hujus.*
c 5 *axi.* 1.
d 1 *hypoth.*

Prop. III.

Fig. 236. *Solidarum magnitudinum* (X Y) *quæ æqualem molem habentes æquè graves sunt, atque humidum, in humidum* (B A C) *demissæ demergentur, ita ut ex humidi superficie* (B C) *nihil extet, non tamen adhuc deorsum ferentur.*

Bisecetur angulus B A C rectâ A F, & centro A ducatur arcus D G E, intra humidum; & si dicatur aliquid solidi eminere, puta Y, liquet contentum spatio B D G F, unà cum Y, majus esse humido F G E C, & proinde illo plus ponderare (quum solidum X Y humido [a]æquè grave sit); quare pars D G magis premetur parte G E; [b]nec consisteret solidum, donec X Y omnino immersum fuerit, tum vero quiescet, quum compressio ubique æqualis sit. *Q.E.D.*

a *hyp.*
b 1 *hypoth.*

Prop.

Prop. IV.

Solidarum magnitudinum (X) *quæcunque levior humido fuerit, demissa in humidum non demergetur tota, sed aliqua pars ipsius ex humidi superficie extabit.* Fig. 237.

Fiat ut in præcedenti, & si dicatur tota X demergi, quoniam X [a] levior est humido, liquet id quod continetur spatio B D G F minùs ponderare humido F G E C, & proinde D G minus premi, quàm G E, ideóque haud consistere humidum, donec aliquid ipsius X emineat. [b] *Q.E.D.*

[a] *hyp.* [b] *1 hypoth.*

Prop. V.

Solidarum magnitudinum (X Y) *quæcunque levior humido fuerit, demissa in humidum usque eò demergetur, ut tanta moles humidi, quanta est partis demersæ* (X), *eandem quam tota magnitudo* (X Y) *gravitatem habeat.* *vid.* Fig. 236.

Si enim pars humidi æqualis demersæ X non æquè gravis sit, ac tota X Y, liquet id quod continetur spatio B D G F unà cum Y, & humidum C E G F non æquè ponderare; ergo D G, & E G inæqualiter premi, [a] ergóque humidum non manere, donec id eveniat. *Q.E.D.*

[a] *1 hypoth.*

Prop. VI.

Solidæ magnitudines (A) *humido leviores, in humidum impulsæ, sursum feruntur tantâ vi, quanto humidum molem habens magnitudini* (A) *æqualem gravius est ipsâ magnitudine* (A). Fig. 238.

Sit X gravitas magnitudinis A, & X + Y gravitas humidi ipsi A æqualis. Adsumatur verò B, cujus gravitas sit excessus Y. Itaque detur A + B in humidum, [a] demergetur ejus pars, cui æquale humidum gravitatem habet, quantam tota A + B, [b] hoc est ipsam X + Y. at humidum ipsi A æquale [b] tantam habet. ergo pars demersa erit A. Constat verò A tantâ vi sursum niti, quantâ B deorsum premi; (neutra enim vis prævalet). atqui B deorsum fertur vi gravitatis, ergo A eâdem vi assurgit. *Q.E.D.*

[a] *5 hujus.* [b] *hyp.*

Corollarium. Excedat humidum tibi æquale solidum gravitate Y. ergo illud humidum vi solidum demergenti resistit gravitate, Y; quâ vi remotâ, illud pellit A eadem vi.

tes D, E resiliant, locúmque cedant deorsum nitenti corpori A. Ita mihi videtur accipienda, & explicanda hæc hypothesis.

Prop. I.

Fig. 234. *Si superficies aliqua plano secetur, per idem semper punctum* (A) *sitque sectio* (B C) *circuli circumferentia, centrum habens punctum illud* (A), *per quod plano secatur, sphæræ superficies erit.*

Nam ab A ad superficiem ducantur rectæ A B, A C utcunque, per quas transit planum; hoc in dicta superficie [a] producet circuli circumferentiam, cujus centrum A. [b] ergo A B, A C æquales erunt. Simili discursu omnes rectæ ab A ad superficiem ductæ æquales erunt. [c] quare superficies proposita est sphærica. *Q.E.D.*

a 2 *hyp.*
b 15. *def.* 1.
c 1 *def.* 17 *Theod.*

Prop. II.

Fig. 235. *Omnis humidi consistentis, atque manentis superficies sphærica est cujus sphæræ centrum est idem quod centrum terræ.*

Centrum terræ sit A. Per hoc secetur humidum plano quocunque, in quo ab A ad superficiem humidi ducantur utcunque rectæ AB, AC. Hæ si pares fuerint, [a] liquet B C esse circumferentiam circuli, & [b] proinde superficiem humidi esse sphæricam. Sin impares dixeris, centro A intra humidum ducatur arcus D E. ergo B D, C E [c] impares sunt & inæqualiter premunt sibi subjectas humidi partes; [d] unde non consistet humidum, sed conturbabitur, contra hypothesin.

a 15. *def.* 1.
b 1 *hujus.*
c 5 *ax.* 1.
d 1 *hypoth.*

Prop. III.

Fig. 236. *Solidarum magnitudinum* (X Y) *quæ æqualem molem habentes æque graves sunt, atque humidum, in humidum* (B A C) *demissæ demergentur, ita ut ex humidi superficie* (B C) *nihil extet, non tamen adhuc deorsum ferentur.*

Bisecetur angulus B A C rectâ A F, & centro A ducatur arcus D G E, intra humidum; & si dicatur aliquid solidi eminere, puta Y, liquet contentum spatio B D G F, una cum Y, majus esse humido F G E C, & proinde illo plus ponderare (quum solidum X Y huic humido [a] æquè grave sit); quare pars D G magis premetur parte G E, [b] nec consistet solidum, donec X Y omnino immersum fuerit, tum vero quiescet, quum compressio ubique æqualis sit. *Q.E.D.*

a *hyp.*
b 1 *hypoth.*

P

Prop. IV.

Solidarum magnitudinum (X) *quæcunque levior humido fuerit, demissa in humidum non demergetur tota, sed aliqua pars ipsius ex humidi superficie extabit.* Fig. 237.

Fiat ut in præcedenti, & si dicatur tota X demergi, quoniam X [a] levior est humido, liquet id quod continetur spatio B D G F minùs ponderare humido F G E C, & proinde D G minus premi, quàm G E, [b] ideóque haud consistere humidum, donec aliquid ipsius X emineat. *Q.E.D.* [a] *hyp.* [b] 1 *hyp.*

Prop. V.

Solidarum magnitudinum (X Y) *quæcunque levior humido fuerit, demissa in humidum usque eò demergetur, ut tanta moles humidi, quanta est partis demersæ* (X), *eandem quam tota magnitudo* (X Y) *gravitatem habeat.* *vid.* Fig. 236.

Si enim pars humidi æqualis demersæ X non æquè gravis sit, ac tota X Y, liquet id quod continetur spatio B D G F unà cum Y, & humidum C E G F non æquè ponderare; ergo D G, & E G inæqualiter premi, [a] ergóque humidum non manere, donec id eveniat. *Q.E.D.* [a] 1 *hyp.*

Prop. VI.

Solidæ magnitudines (A) *humido leviores, in humidum impulsæ, sursum feruntur tantâ vi, quanto humidum molem habens magnitudini* (A) *æqualem gravius est ipsâ magnitudine* (A). Fig. 238.

Sit X gravitas magnitudinis A, & X + Y gravitas humidi ipsi A æqualis. Adsumatur verò B, cujus gravitas sit excessus Y. Itaque demissâ A + B in humidum, [a] demergetur ejus pars, cui æquale humidum gravitatem habet, quantam tota A + B, [b] hoc est ipsam X + Y. at humidum ipsi A æquale [b] tantam habet. ergo pars demersa erit ipsa A. Constat verò A tantâ vi sursum niti, quantâ B deorsum premit; (neutra enim vis prævalet). atqui B deorsum fertur vi gravitatis Y, ergo A eâdem vi assurgit. *Q.E.D.* [a] 5 *hujus.* [b] *hyp.*

Brevius. Excedat humidum tibi æquale solidum gravitate Y. ergo humidum vi solidum demergenti resistit gravitate, Y; quâ vi remotâ, sursum pellit A eadem vi.

Sch. Itaque gravia humido leviora, in ipso quasi absolutè levia evadunt, deperditâ propriæ gravitatis vi, & efficaciâ.

Prop. VII.

Fig 239. *Solidæ magnitudines* A) *humido gravioret demissæ in humidum ferentur, deorsum, donec descendant; & erunt in humido tanto leviores, quanta est gravitas humidi molem habentis solidæ magnitudini æqualem.*

Quòd A deorsum feretur patet, quia partes ipsi subjectæ reliquis magis pressæ cedunt ipsi, locúmque dant. Porro humidi corpori A æqualis gravitas sit X, ipsius verò A gravitas sit X + Y. Liquet corpus A in humido existens sibi subjectas partes deprimere solâ gravitate Y, qua resistentiam subjecti humidi exuperat. Quòd si extra humidum esset, totâ gravitate X + Y ponderaret, ergo in humido existens levior fit quantitate gravitatis X. *Q.E.D.*

Aliter. Sit X + Y gravitas solidi A, & X gravitas ipsi æqualis humidi. Assumatur verò solidum B, cujus gravitas sit X, eique æqualis humidi gravitas X + Y. Itaque composita A + B sibi æquali humido æquè grave est, (nam 2X + Y communis utriusque est gravitas).
a 3 *hujus.* [a]Itaque A B in humido immota consistet. ergo [b] cùm B sursum nitatur impetu Y (quo ab humidi gravitate exceditur), eadem A deorsum
b 6 *hujus.* feretur (æquipollent enim hæ vires, & altera alterius impedit effectum). unde liquet propositum.

Hypoth. II.

Ponatur eorum quæ in humido sursum feruntur, unumquodque
* *& deorsum.* *sursum ferri secundum perpendicularem, quæ per centrum gravitatis ipsorum ducitur.

Lemma I.

Circuli se intersecent punctis E, F, quæ connectat recta E F. centra autem T, H jungat recta T H. hæc bisecat rectam E F ad rectos.
Fig. 240. Fig. 241.

Nam (ductis T E, T F, H E, H F) trigona T E H, T F H sibi mutuo [a]æquilatera sunt. [b]unde ang E T H = F T H. [c]ergo in trigonis
a 15. *def.* 1. b 8. 1. c 4. 1. E T K, F T K est E K = F K, & ang T K E = T K F. *Q.E.D.*

Lem.

Lemm. II.

In sphæræ portione centrum gravitatis est in axe portionis. Demonstratum hoc à *Commandino* de centro gr. prop. 15. & à *Luca Val.* lib. 2. prop. 34.

Prop. VIII.

Si aliqua magnitudo solida (A B C) *levior humido, quæ figuram portionis sphæræ habeat in humidum demittatur, ita ut portionis basis* (A C) *non tangat humidum; figura insidebit recta, ita ut portionis axis* (D B) *sit secundum perpendicularem. Et si ab aliquo inclinetur figura ut basis portionis humidum contingat, non manebit inclinata, si demittatur, sed recta restituetur.* Fig. 242.

Inclinetur portio, & per axem B D, ac terræ centrum T transeat planum, faciens segmentum circuli A B C, cujus pars immersa sit E B F G. Jungatur E F, quem secet recta T H, connectens terræ ac sphæræ centra T, H, & quidem [a] ad rectos in K. [b] Estque centrum gr. [*] portionis E L F in L K, & portionis E M F in M K, & [c] proinde totius E L F M in L M, puta N. Portionis verò A B C centrum gr. [b] est in axe B D, puta in O. [d] Transitque recta N O per reliquæ extra humidum partis centrum gr. quod sit P; connectatur T P. Cùm igitur pars immersa [e] sursum feratur secundum rectam T N, pars verò extans deorsum secundum P T (neque hæ lationes sibi invicem ullatenus obsistant, utpote per alias, aliásque lineas peractæ) non quiescet portio, donec hæc centra cum centro terræ in unam rectam incidant, hoc est donec axis D B sit secundum perpendicularem. Tum verò quiescent, quia quanto impetu quæ in humido est pars sursum, tanto quæ extra deorsum per eandem lineam contendit.

[a] *lemma prac.*
[b]
[*] *ducto plano per* E F *ad* T H *perpendicularis.*
[c] *cor. 7. 1 æqu.*
[d] 8 *æquip.*
[e] 2 *hypoth.* & 6 *hujus.*

Not. Recta N P libram repræsentat, in qua duo gravia E B F G, A E G F C diversimodè ponderant ([*] levior est enim pars immersa illâ, quæ extat). Suspensio fit ex puncto O. Radii sunt O N, O P; descendit P, attollitur N; donec puncto O in T H constituto contingat æquilibrium.

[*] 6 *hujus.*

Coroll. Ex his, cùm corporis cujuscunque humido levioris pars alia demergatur, alia emineat, nunquam quiescet corpus, & fluctuare desinet, donec centra harum partium, totius, & terræ in una recta conveniant, quod si contingat, tum quidem consistet corpus.

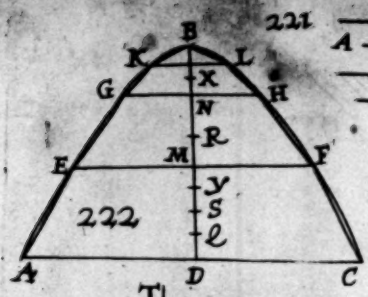
Prop

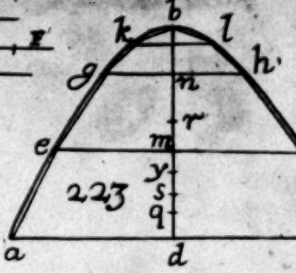
Prop. IX.

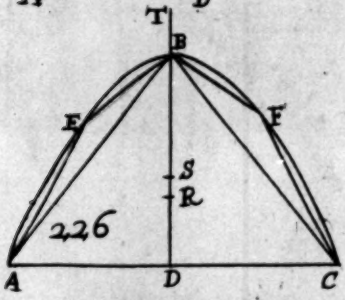
Fig. 243. *Quod si figura* (A B C) *humido levior in humidum demittatur, ita ut basis tota sit in humido, insidebit recta, ita ut axis ipsius secundum perpendicularem constituatur.*

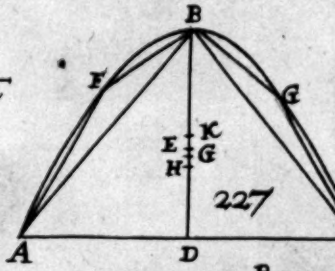
Invertatur figura præcedentis, & ex simili discursu constabit propositum.

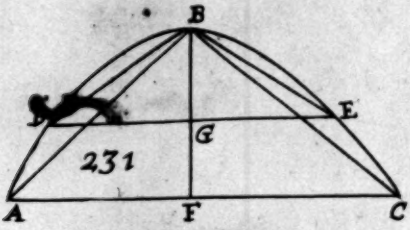
DE

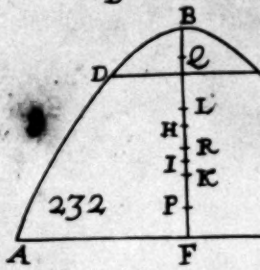

221
B C
A
E F
D
B
K L
G H
X
N
R
M
E F
y
S
222
l
A D C

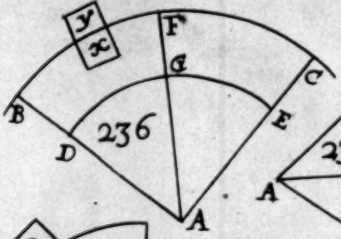

b
k l
g h
n
r
e
m
y
s
223
q
a d

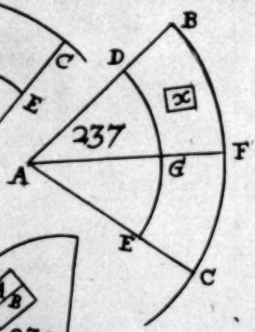

T
B
E F
S
R
226
A D C

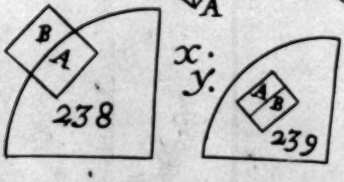

B
F G
E K
H G
227
A D

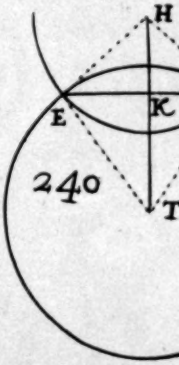

B
E
G
231
A F C

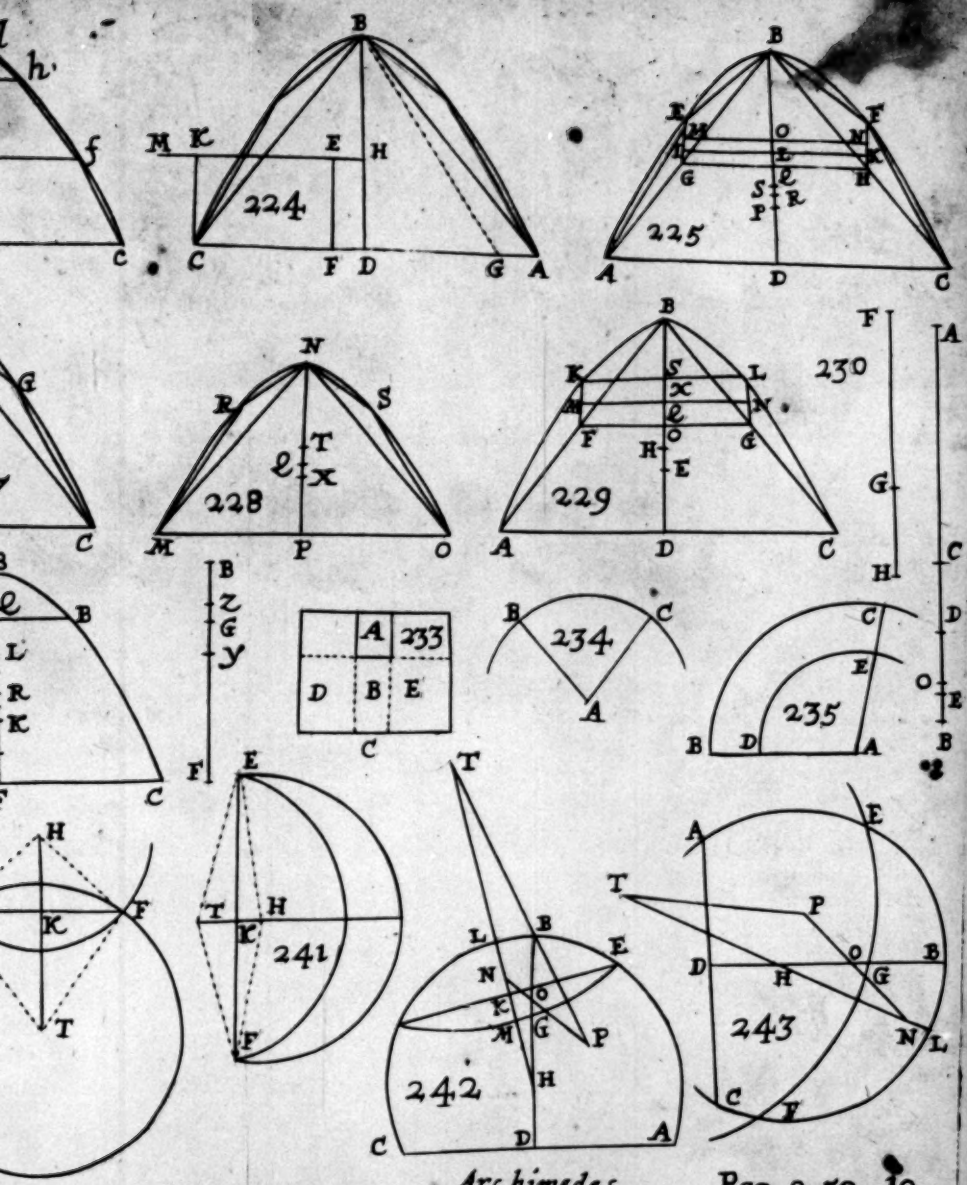

B
D l
L
H
R
I
K
232
P
A F


y
x
F
G
C
B
E
236
D
A


B
D
x
237
A
G
F
E
C


B
A
238
x.
y.
A B
239


H
E
K
240
T



Archimedes. Pag. 250. 10.

Fig.

De Insidentibus Humido,

LIBER SECUNDUS.

Prop. I.

Si magnitudo aliqua (A B) *humido levior demittatur in humidum, eam in gravitate proportionem habebit ad humidum* (C D) *aqualis molis, quam magnitudinis demersæ pars* (B) *habet ad totam magnitudinem* A B. Fig. 244.

Sit humidi C D pars C = A [a](unde D = B), corporúmque trium A B, C, D gravitates sint X, Y, Z. [b]unde X = Z. ergo X. Y + Z [c]:: (Z. Y + Z [*]:: D. C + D ::) [d]B. A + B. *Q.E.D.*

a 3. *ax.* 1.
b 5. 1 *hujus.*
c 7. 5.
d *ſcb.* 7. 5.

Lemma I.

Sit conus Iſoſceles rectangulus A B C, in quo ſectio parabola EDF, cujus vertex D, rectum latus R; erit A D = $\frac{1}{2}$ R. Fig. 245.

Nam B Cq [a]= (B Aq + C Aq = 2 B Aq ([b]ob B A = C A) =) 2 B A × C A. [c]& R. A D :: B Cq. B A × C A. ergo R. A D :: 2. 1. *Q.E.D.*

a 47. 1.
b *hyp.*
c 11. *1 Apoll.*

Not. A D ab *Archimede* nuncupatur, ea quæ uſque ad axem.

Lemma II.

Recta G Q tangens parabolen A B C diametro B D occurrat (M Q); in qua ubicunque ſumatur K N æqualis ei, quæ uſque ad axem; per contactum G ducatur G O parallela diametro, cui occurrat N O diametro perpendicularis; ducta K O tangenti G Q perpendicularis erit. Fig. 246.

Ducantur enim G Z tangenti, & G X diametro perpendiculares. Sitque R rectum latus parabolæ. Eſtque Q X × X Z [a]= (G Xq [b]= $\frac{R}{}$

a *cor.* 8. 6. & 17. 6.
b 11. *1 Apol.*

c 16. 6.
d 35. *1 Apol.*
e *Lemm. præc.*
f 7. 5.
g 34. 1.
h 33. 1.
k [illegible].
l [illegible].

R * X B. [c]ergo R . X Z :: (Q X . X B [d]:: 2. 1 [e]::) R . K N. ergo K Z [f]= N X [g]= O G. [h] unde K O, Z G parallelæ sunt; & cum Z G tangenti G Q [k] perpendicularis sit, [l]erit K O eidem perpendicularis. *Q. E. D.*

Lemma III.

Centrum gravitatis dividit axem conoidis parabolici, ita ut pars ad verticem, ejus quæ ad basim sit dupla.

Demonstratum hoc à *Commandino*, libro de centro gravitatis, prop. 29. & à *Luca Valerio* lib. 2. prop. 41.

Prop. II.

Fig. 147.

Conoidis rectanguli recta portio (A B C) *quando axem* (B D) *habuerit minorem quam sesquialterum ejus* (K N) *quæ usque ad axem, quamcunque proportionem habens ad humidum in gravitate; demissa in humidum, ita ut ipsius basis* (A C) *humidum non contingat, & posita inclinata, non manebit inclinata, sed recta restituetur. Rectam dico consistere talem portionem, quando planum, quod ipsam secuit, superficiei* (E F) *humidi fuerit æquidistans.*

a 12 *de conoid. & sphæroid.*
b 5. 2 *Apol.*
c 3 *Lem. præc.*
d *hyp.*
e 8. 1 *æquipond.*
f 2 *lem. præc.*
g 29. 1.
h 32. 1.
k 29. 1.
l 2 *hyp.* 1 *hujus.*
m *vid. cor.* 8. 1. *hujus.*

Secetur conoides plano per axem [a] facienti sectionem A B C parabolam (quod in sequentibus semper concipiatur factum, quamvis brevitatis causa reticeatur) cujus pars submersa habeat diametrum G H. Sectionem verò tangat G Q ad E F [b]parallela. Portionis A B C centrum gr. sit K, unde K B [c]= $\frac{2}{3}$ D B [d]= K N. Sitque L centrum gr. partis demersæ, [e] unde in protractâ L K erit centrum gr. reliquæ partis, quod sit M: ducatur N O perpendicularis ad H G, vel B D; & connectatur K O secans tangentem Q G in P; [f] & quidem ad rectos. Jam ob angulos [h]K G P, K Q P ([k] B I F) acutos, liquet perpendicularem K P cadere inter G, & B; nec centra L, M existere in rectâ K P; etsi ducantur L R, M S ad G Q, vel E F perpendiculares, [l]pars demersa sursum nitetur per rectam R L, pars extans deorsum secundum M S, tota portio A B C fertur juxta K P, [m] unde non consistet portio A B C, donec hæc centra incidant in axem B D. *Q. E. D.*

Prop.

Prop. III.

Recta portio conoidis rectanguli, quando axem habuerit minorem, quàm sesquialterum ejus quæ usque ad axem, quamcunque proportionem habens ad humidum in gravitate; demissa in humidum ita ut basis ipsius tota sit in humido, & posita inclinata, non manebit inclinata, sed restituetur, ut axis ipsius secundum perpendicularem fiat. Fig. 248.

Inversâ figurâ, simili planè discursu probatur, quo antecedens.

Prop. IV.

Recta portio (A B C) *conoidis rectanguli, quando fuerit humido levior, & axem* (B D) *habuerit majorem, quàm sesquialterum ejus* (K N) *quæ usque ad axem; si in gravitate ad humidum æqualis molis minorem proportionem habeat eâ, quàm quadratum quod fit ab excessu* (B T), *quo axis major est, quàm sesquialter ejus* (K N) *quæ usque ad axem, habet ad quadratum, quod ab axe* (B D), *demissa in humidum, ita ut ipsius basis* (A C) *humidum non contingat, & posita inclinata, non manebit inclinata, sed recta restituetur.* Fig. 249.

Præparatio imitatur præcedentem, similésque lineæ eidem literis designantur, (quod ferè fit in sequentibus.) Sit verò gravitas corporis A B C ad gravitatem humidi æqualis ut Y ad Z. Estque G Hq. Dq [a]:: (port E G F. A B C [b]::) Y. Z [c] = vel ⊏ B Tq. B Dq. erit G H = vel ⊏ B T, [d] quare G L = vel ⊏ B N. (nam ob B T ½ K N [e] = B D [f] = ½ B K [g] = ½ B N + ½ K N, ideóque B T [h] = 3 B N. itemque G H [i] = ⅔ G L, [k] erit G H. B T :: G L. B N). ergo L ⊏ G O ([l] ⊐ B N). ergo punctum O est inter L, G. Nec ultra totius portionis, & partium in eadem sunt linea, sed pars deorsa [m] sursum tendit per R L, & altera deorsum per M S. unde non consistet portio A B C &c. ut in præced.

Coroll. B N = ⅓ B T.

a 26. *de conoid. & sphæroid.*
b 1 *hujus.*
c *hyp.*
d 9 *vel* 10. 5 & 22. 6.
e 14. 5.
f 3 *lem.* 1 *huj.*
g 1. 2.
h 3. *ax.* 1.
k 15. 5.
l 17. 1. *com. Apol.*
m 2 *hyp.* 1 *huj*

Prop. V.

Recta portio conoidis rectanguli, quando levior humido axem habuerit minorem, quàm sesquialterum ejus, quæ usque ad axem; si ad humidum in gravitate non majorem proportionem habeat, quàm excessus, quo quadratum quod fit ab axe, majus est quadrato, quod ab excessu, quo Fig. 250.

c 16. 6.
d 35. 1 Apol.
e Lemm. præc.
f 7. 5.
g 34. 1.
h 33. 1.
k [illegible].
l [illegible].

R * X B. [c]ergo R . X Z :: (Q X . X B [d]:: 2. 1 [e]::) R . K N. erg K Z [f]= N X [g]= O G. [h] unde K O, Z G parallelæ sunt; & cu Z G tangenti G Q [k] perpendicularis sit, [l]erit K O eidem perpendicu laris. *Q.E.D.*

Lemma III.

Centrum gravitatis dividit axem conoidis parabolici, ita ut pars a verticem, ejus quæ ad basim sit dupla.

Demonstratum hoc à *Commandino*, libro de centro gravitatis, pro 29. & à *Luca Valerio* lib. 2. prop. 41.

Prop. II.

Fig. 147. *Conoidis rectanguli recta portio* (A B C) *quando axem* (B D) *ha buerit minorem quam sesquialterum ejus* (K N) *quæ usque ad axem quamcunque proportionem habens ad humidum in gravitate; demissa i humidum, ita ut ipsius basis* (A C) *humidum non contingat & posita i clinata, non manebit inclinata, sed recta restituetur. Rectam dico co sistere talem portionem, quando planum, quod ipsam secuit, superfici* (E F) *humidi fuerit æquidistans.*

a 12 *de conoid. & sphæroid.*
b 5. 2 *Apol.*
c 3 *Lem. præc.*
d *hyp.*
e 8. 1 *æquipond.*
f 2 *lem. præc.*
g 29. 1.
h 32. 1.
k 29. 1.
l 2 *byp.* 1 *huj.*
m *vid. cor.* 8. 1. *hujus.*

Secetur conoides plano per axem [a] facienti sectionem A B C pa rabolam (quod in sequentibus semper concipiatur factum, quamv brevitatis causa reticeatur) cujus pars submersa habeat diametru GH. Sectionem verò tangat G Q ad E F [b]parallela. Portionis A B centrum gr. sit K, unde K B [c]= ⅖ D B [d]⊐ K N. Sitque L centru gr. partis demersæ, [e] unde in protractâ L K erit centrum gr. reliq partis, quod sit M: ducatur N O perpendicularis ad H G, vel B & connectatur K O secans tangentem Q G in P; [f] & quidem ad r ctos. Jam ob angulos [h] K G P, K Q P ([k] B I F) acutos, liquet p pendicularem K P cadere inter G, & B; nec centra L, M existere rectâ K P; etsi ducantur L R, M S ad G Q, vel E F perpendular [l] pars demersa sursum nitetur per rectam R L, pars extans deorsi secundum M S, tota portio A B C fertur juxta K P, [m] unde non co sistet portio A B C, donec hæc centra incidant in axem B D. *Q.E.*

P

prop. III.

Recta portio conoidis rectanguli, quando axem habuerit minorem, quàm ſeſquialterum ejus qua uſque ad axem, quamcunque proportionem habens ad humidum in gravitate; demiſſa in humidum ita ut baſis ipſius tota ſit in humido, & poſita inclinata, non manebit inclinata, ſed ita reſtituetur, ut axis ipſius ſecundum perpendicularem ſiat. Fig. 248.

Inverſâ figurâ, ſimili planè diſcurſu probatur, quo antecedens.

Prop. IV.

Recta portio (A B C) *conoidis rectanguli, quando fuerit humido levior, & axem* (B D) *habuerit majorem, quàm ſeſquialterum ejus* (K N) *qua uſque ad axem; ſi in gravitate ad humidum æqualis molis non minorem proportionem habeat eâ, quàm quadratum quod fit ab exceſſu* (B T), *quo axis major eſt, quàm ſeſquialter ejus* (K N) *qua uſque ad axem, habet ad quadratum, quod ab axe* (B D), *demiſſa in humidum, ita ut ipſius baſis* (A C) *humidum non contingat, & poſita inclinata, non manebit inclinata, ſed recta reſtituetur.* Fig. 249.

Præparatio imitatur præcedentem, ſimiléſque lineæ eidem literis deſignantur, (quod ferè fit in ſequentibus.) Sit verò gravitas corporis A B C ad gravitatem humidi æqualis ut Y ad Z. Eſtque G Hq. B Dq [a]:: (port E G F. A B C [b]::) Y. Z [c] = vel ⊏ B Tq. B Dq. ergo G H = vel ⊏ B T, [c] quare G L = vel ⊏ B N. (nam ob B T + ½ K N [c] = B D [f] = ½ B K [g] = ½ B N + ½ K N, ideóque B T [h] = ½ B N. itemque G H [f] = ½ G L, [k] erit G H. B T :: G L. B N). ergo G L ⊏ G O (⊐ B N). ergo punctum O eſt inter L, G. Nec centra totius portionis, & partium in eadem ſunt linea, ſed pars demerſa [m] ſurſum tendit per R L, & altera deorſum per M S. unde non conſiſtet portio A B C &c. ut in præced.

Coroll. B N = ⅔ B T.

a 26. *de conoid. & ſphæroid.*
b 1 *hujus.*
c *hyp.*
d 9 *vel* 10. 5 & 22. 6.
e 14 5.
f 3 *lem.* 1 *huj.*
g 1. 2.
h 3. *ax.* 1.
k 15. 5.
l 17. 1. *con. Apol.*
m 2 *hyp.* 1 *huj*

Prop. V.

Recta portio conoidis rectanguli, quando levior humido axem habuerit majorem, quàm ſeſquialterum ejus, qua uſque ad axem; ſi ad humidum in gravitate non majorem proportionem habeat, quàm exceſſus, quo quadratum quod fit ab axe, majus eſt quadrato, quod ab exceſſu, quo Fig. 250.

axis major est, quàm sesquialter ejus, quæ usque ad axem, ad quadratum quod ab axe; demissa in humidum, ita ut basis ipsius tota sit in humido, & posita inclinata non manebit inclinata, sed restituetur ita, ut axis ipsius secundum perpendicularem fiat.

Invertatur figura præcedentis, & stantibus quæ ibidem dicta sunt, quoniam B Dq. G Hq [a] :: port A B C. E G F; [b] erit B Dq — G Hq. B Dq :: (port A B C — E G F. A B C [c] ::) Y. Z [d] =, vel ⊐ B Dq — B Tq. B Dq. [e] ergo B Dq — G Hq =, vel ⊐ B Dq — B Tq. [f] quare B T =, vel ⊐ G H & deinceps, ut in præcedenti.

a 26 de conoid. & sphæroid.
b invertendo, et cor. 19. 5.
c 1. 2 hujus.
d hyp.
e 9. vel 10. 5.
f 22. 6.

Lemma.

Fig. 251. In triangulo T D A si latus T D ita dividatur, ut sit T D. T I :: V D. Q I, ducantúrque per V & Q parallelæ ad D A, & I A, hæ convenient in latere T A.

Nam T D. T I [a] :: T V. (T D — V D) . T Q. (T I — Q I). ergo convertendo T D. I D :: T V. Q V. atqui I D. D A [b] :: Q V. V Y. (ob V Y ad D A, & Q Y ad I A parallelas) ergo ex æquo T D. D A :: T V. V Y. [c] ergo T Y A est recta linea. *Q.E.D.*

a hyp. & 19. 5.
b 4. 6.
c conv. 4. 6.

2. Quòd si conveniant parallelæ in Y, erit T D. T I :: V D. Q I. Nam T D. D A [d] :: T V. V Y. & D A. I D [d] :: V Y. Q V. ex æquo igitur T D. I D :: T V. Q V. [f] ergo T D. T I :: T V. T Q :: V D. (T D — T V). Q I. (T I — T Q). *Q.E.D.*

Coroll. T V. T Q :: V D. Q I.

d 4. 6.
f 19. 5.

Prop. VI.

Fig. 252. *Conoidis rectanguli recta portio* (A B C), *quando levior humido axem* (B D) *habuerit majorem quidem, quàm sesquialterum ejus* (K N) *qua usque ad axem, minorem verò, quàm ut ad eam, qua usque ad axem proportionem habeat, quam quindecim ad quatuor, in humidum demissa, adeò ut ipsius basis* (A C) *contingat humidum* (A F), *nunquam consistet inclinata, ita ut basis in uno puncto humidum contingat.*

Fiat ut in præcedentibus, & porro sit K V = $\frac{4}{5}$ D B; (unde cùm D K [a] = $\frac{1}{15}$ D B, erit D V = $\frac{2}{15}$ D B, & B V = $\frac{13}{15}$ D B, & proinde B V = $\frac{13}{9}$ D V = $\frac{13}{3}$ D V). Contingant G Q, A T occurrentes diametro T Q B D; ducantúrque V Y (sectioni occurrens in M, tangenti Q G in Y), N O, G X, H ∞ basi A C parallelæ.

a 3. lem. 1. 2 b.

Jam

Jam si B D, B V, B X sint ÷÷ (quod fortè contingere potest), [b]etiam D Aq, V Mq, X Gq erunt ÷÷ in eadem ratione, [c]ergo D A, V M, X G erunt ÷÷. Item B V. B X [d]:: B D. B V [e]:: D Aq. V Mq [f]:: D A. X G [g]:: D I. X ♌ (ob trigona A D I, G X ♌ similia). ergo permutando D I. B V :: X ♌ ([h]I ☉, ob ☉ H [k]= X G). B X [l]:: 2. 1 [m]:: D ☉ (D I—I ☉). V X (B V—B X) [l] :: T D. B D. Item (ob B D. B V [d]:: B V. B X. erit convertendo). B D. V D :: B V. V X. ergo ex æquo T D. V D :: D I. V X. & permutando T D. D I :: V D. V X. ac convertendo T D. T I :: V D. V D—V X, vel Q I. (Nam Q I [k] = G H [k] = X ☉ = V ☉ + V X = V ☉ + ½ D ☉ = V ☉ + D ☉ — ½ D ☉ = V D — ½ D ☉ [n] = V D — V X). [o]ergo punctum Y est in T A. Porro, quia V D. X ☉ ([n]G H) [p]:: T V ([p]D B + B V). T Q ([q]D X). [r]erit V D. G H :: D B + B V — V D. D X — X ☉. atqui D B + B V — V D = 2 B V [s] = D I. & D X — X ☉ = D ☉. [t]ergo V D. G H :: D I. D ☉ [t]:: B V ([u]½ D I). ½ D ☉ ([u]V X, vel G Z). & permutando G H. G Z :: D V. B V [u]:: 3. 2. x unde punctum Z erit centrum portionis A G F, in hoc casu.

Quod si porcio major sit minórve, quàm ut B D, B V, B X sint ÷÷, sit illa ⌓ B c, diametro B d, basi a c ad A C parallelâ, ita ut submergatur portio ⌓ B f, diametro G h, basi a f ad A F itidem parallelâ, cui occurrat tangens T A R, ducaturque R S ad A C parallela, & occurrens diametro B d in S. Estque S V. D V [y] :: R Y. A Y [y]:: G h. G H. & permutando S V. G h :: D V. G H [u]:: B V. G Z. iterumque permutando G h. G Z :: S V. B V [z] ⊏ d V. B V [u]:: 3. 1. quare in hoc casu centrum cadit inter z, & h; & proinde infra O in quocunque casu (quoniam K V ⊐ K N). Itaque cùm tota portio gravitet secundum rectam K O P. & pars quæ demergitur, quæque extat per alias, liquet solidum non consistere &c. ut in præcedentibus.

Coroll. B V = $\frac{4}{15}$ D B.

b 20 *I Apol.*
c 22. 6.
d *hyp.*
e *prius.*
f *cor.* 20 6
g *cor.* 4. 6.
h 4. 6.
k 34. 1.
l 35. *I Apol.*
m 19. 5.
n *cor. lem. præc.*
o *prius.*
p 35. *I Apol.* & 2. *ax.* 1.
q 35. 1. *Apol.* & 3. *ax.* 1.
r 19. 5.
s *schol.* 7. 5.
t 15. 5.
u *prius.*
x 3 *lem.* 1. 2 *h.*
y *sch.* 2. 6.
z 8. 5.

Prop. VII.

Recta portio conoidis rectanguli, quando levior humido axem habuerit, majorem quidem, quàm sesquialterum ejus, qua usque ad axem, minorem verò, quàm ut ad eam, quæ usque ad axem proportionem habeat, quàm 15 *ad* 4, *in humidum demissa adeò ut basis ipsius tota sit in humido, nunquam consistet ita, ut basis contingat humidi superficiem, sed tota in humido sit, & nullo modo ejus superficiem contingat.* Fig. 253.

Inversâ figurâ, eodem modo demonstratur quo antecedens.

Prop. VIII.

Fig. 253. 254. *Conoidis rectanguli recta portio* (A B C), *quando axem* (BD) *habuerit majorem quidem, quàm ſeſquialterum ejus* (K N) *quæ uſque ad axem; minorem verò quàm ut ad eam, quæ uſque ad axem, proportionem habeat, quam* 15 *ad* 4: *ſi in gravitate ad humidum habeat proportionem minorem ea, quam quadratum, quod fit ab exceſſu* (BT) *quo axis major eſt, quàm ſeſquialter ejus quæ uſque ad axem, habet ad quadratum, quod ab axe; demiſſa in humidum, ita ut baſi ipſius* (A C) *humidum non contingat, neque in rectum reſtituetur, neque manebit inclinata, niſi quando axis* (B D) *cum ſuperficie humidi* (E F) *angulum fecerit æqualem ei, de quo infra dicetur.*

Sit gravitas portionis ad gravitatem humidi ut Zq ad B Dq [a] ⊐ B Tq. B Dq. [b]itaque Z ⊐ B T, [c] & $\frac{2}{3}$ Z ⊐ B N ($\frac{2}{3}$ B T). Sit N φ = $\frac{2}{3}$ Z. & erigatur φ↓ = $\sqrt{\frac{1}{2}}$ K N × B φ, jungantúrque B↓, erit angulus φ B↓, is quem propoſitio innuit. Nam 1. ſit ang φ B↓ = ang E I D, vel G Q X. Eſtque K N. X Q [e]:: K N × X Q. X Qq [f]:: G Xq. X Qq (nam K N × X Q [g] = (K N × 2 X B [h] = 2 K N × X B [k] =) G Xq) [l]:: φ↓q. B φ q (ob [m]ſimilia trigona Q X G, B φ Ψ) [n]:: $\frac{1}{2}$ K N × B φ. B φ q [e]:: $\frac{1}{2}$ K N. B φ [c] :: K N. 2 B φ [o]:: K N. X Q [p]ergo 2 B φ = X Q. & X B ([g] $\frac{1}{3}$ X Q) = B φ. unde X N = φ N [m] = $\frac{2}{3}$ Z. Cúmque ſit G Hq. B Dq [q]:: (port E G F. A B C [r]::) Zq. B Dq, & propterea G H [s] = Z, erit $\frac{2}{3}$ G H ([t]G L) [c] = $\frac{2}{3}$ Z [u] = φ N [x] = G O [y] = G L. & centrum L cum O coincidet. quare centra portionum ſunt in perpendiculari K P, & [z] proinde tota portio immota conſiſtet.

2. Quòd ſi ang φ B↓ ⊐ ang X Q G, fiat ang X Q Y = ∠ φ B↓. Eſtque K N. X Q ([a]:: G Xq. X Q q) [b] ⊏ Y Xq. X Q q [c]:: φ Ψ q. B φ q [d]::) K N. 2 B φ. [e] unde X Q ([i] 2 X B) ⊐ 2 B φ. [g] & B X ⊐ B φ quare N X (G O) ⊏ (N φ = $\frac{2}{3}$ Z = $\frac{2}{3}$ G H) [l] = G L. Cadit igitur punctum O intra centrum L: nec ſunt centra portionum in una recta K P. unde tota portio non conſiſtet.

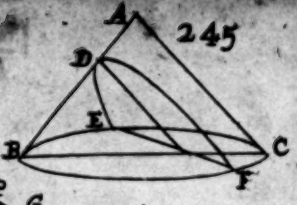
3. Quod ſi ang φ B Ψ ⊏ X Q G, ſimili diſcurſu oſtendetur punctum O [a]dere ſupra L. [z] unde etiam conſequetur motus portionis A B C, quomodo ſæpiùs inculcatum.

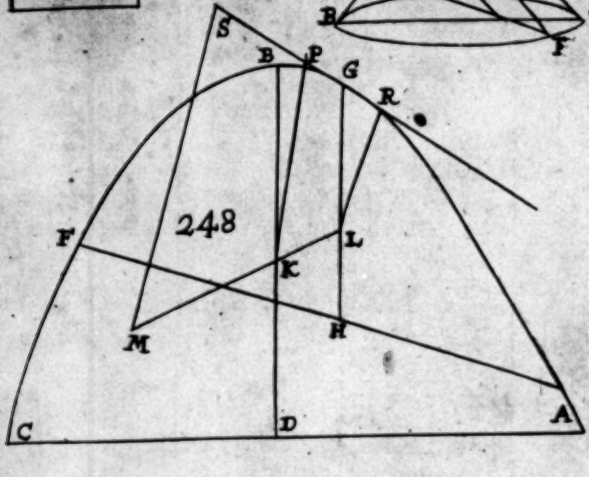
a *hyp.* (6. b 10. 5. & 22. c 15. 5. d *cor.* 4. 2 *b.* e 1. 6. f 7. 5. g 35. 1 *Apol.* h 16. 6. k 11. 1 *Apol.* & 1. *lem.* 1. 2 *b.* l 4. 6. m *conſtr.* n *conſtr.* & 7. 5. o 11. 5. p 9. 5. q 26 *de conoid.* & *ſphæroid.* r *hyp.* & 1. 2 *b.* s 9. 5. t 3. *lem.* 1. 2 *b.* u *conſtr.* x 34. 1. y 1. *ax.* 1. z *ſch.* 8. 1 *huj.* a *priùs. ſuprà.* b 8. 5. c 4. 6. d *ut ſuprà.* e 10. 5. f *priùs.* g 15. 5. h *conſtr.* k *ſupra.* l *hyp.* z *vid. cor.* 8. 1. *hujus.*

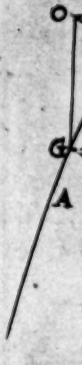
Prop. IX.

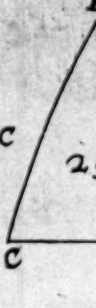
Recta portio conoidis rectanguli, quando axem habuerit, majorem quidem quàm ſeſquialterum ejus, quæ uſque ad axem; minorem verò quàm ut ad eam quæ uſque ad axem proportionem habeat, quam 15 *quàm*

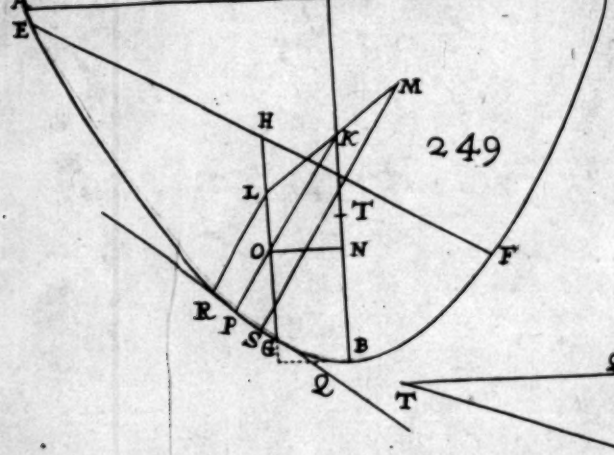
A
B
C
D
244

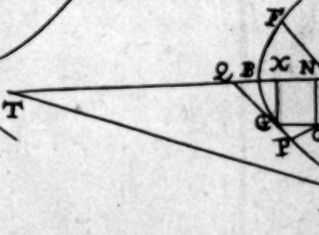

A
245
D
E
B
C
F

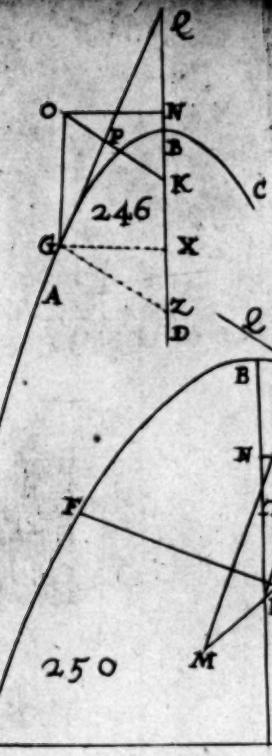

S
B
P
G
R
248
F
L
K
M
H
C
D
A

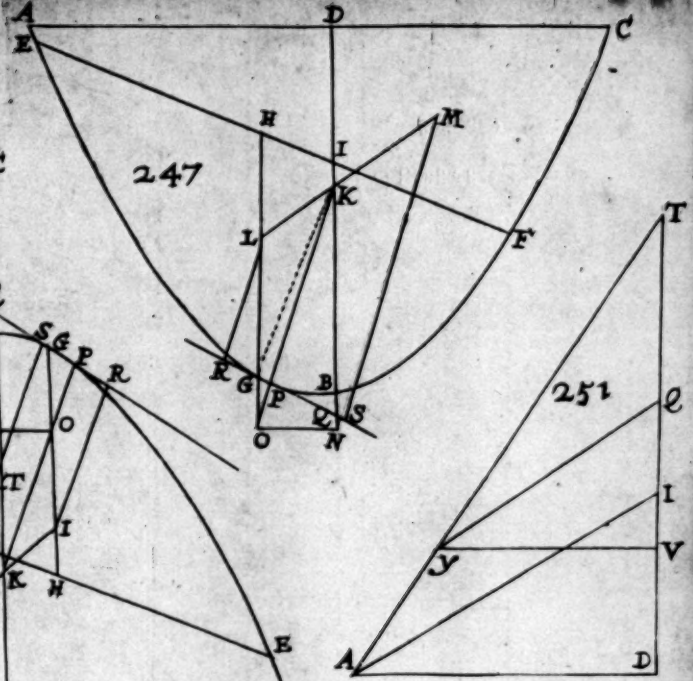

O
G
A

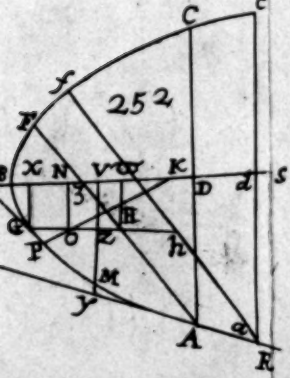

C

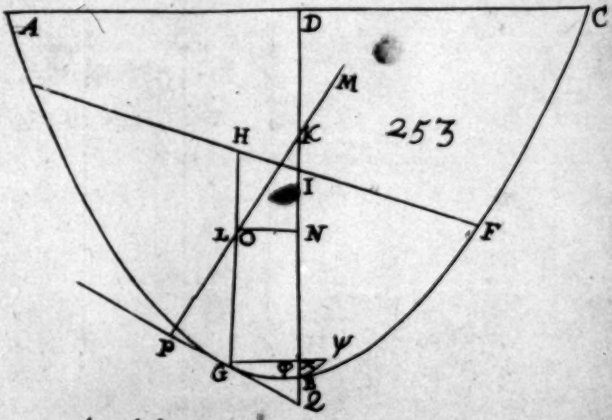

A
D
C
E
M
H
K
249
L
T
O
N
F
R
P
S
G
B
Q
T


F
Q
B
X
N
G
P


246
250


247
251


252


253

2

Fig.

a hyp.
b 10.
c 15.
d cor.
e 1.
f 7.
g 35.
h 16.
k 11.
& 1
2 b
l 4. c
m co
n con
o 11.
p 9.
q 26
& f
r hyp
s 9.
t 3.
u con
x 3
y 1.
z sch
a pri
b 8.
c 4.
d ut
e 1c
f pri
g 1.
h co
k su
l hy
z t
bu

ad ½, *& in gravitate ad humidum proportionem habeat majorem, quàm exceſſus, quo quadratum quod ſit ab axe majus eſt quadrato, quod ab exceſſu, quo axis eſt major, quàm ſeſquialter ejus, qua uſque ad axem, habet ad quadratum quod ab axe, in humidum demiſſa adeò ut baſis ipſius tota ſit in humido, & poſita inclinata, nec convertetur ita ut axis ipſius ſecundum perpendicularem ſit, nec manebit inclinata, niſi quando axis cum ſuperficie humidi angulum fecerit æqualem angulo ſimiliter ut priùs aſſumpto.*

Nam inversâ figurâ præcedentis, quoniam B Dq. G Hq [a]:: port A B C. E G F, [b] erit B Dq—G Hq. B Dq (:: port A B C—E G F. A B C [c]:: Zq B Dq) [d] ⊏ B Dq—B Γq. B Dq [e]quare B Dq—GHq (—Zq) ⊏ B Dq—B Γq. * ergo Z ⊐ B Γ. & ⅔ Z (Nq) ⊐ ⅔ BΓ (N B) &c. ut in præcedenti.

a 26 *de conoid.*
b *cor.* 9. 5. & 4. 5
c *hyp.* & 1. 2 *b.*
d *hyp.*
e 10. 5.
* 17. *ax.* 1.

Schol. Sit I K axis parabolæ G I C, ejuſque baſis G C = 2 G K. & educatur G N, utcunque ſecans parabolam G B A. Ordinatim applicetur N P, & connectatur G P occurrens ipſi B D in O: à quo applicetur O H ordinatim. Sintque R, S recta latera ſectionum G I C, G B A. Súntque tam I K, K G, R, quàm B D, B G, S in ∴. unde cùm I K. K G :: B D. D G. erit I K. R :: B D. S. & permutando I K. B D (I G. B G, vel I P. B O) :: R. S. atqui I P, N P, R, & B O, H O, S ſunt etiam ∴. ergóque I Pq N Pq :: (I P. R :: B O. S ::) B Oq. H Oq. ergo permutando I P. B O :: G P. G O ::) N P. H O. unde ſectionis punctum H eſt in recta G N. & hinc

Fig. 256.

1. *Coroll.* G N. G H (G P. G O) :: G I. G B :: (G K. G D) :: G C. G A. & G H. H N :: G A. A C :: G B. B I :: G D. D K.

Porro, ducatur N M ad I K parallela. Eſtque G C. G A :: (G N. G H :: G M. G K :: M C. A K. & permutando G C. M C :: G A. A K :: L K. H K. item G C. G K :: 2. 1 ::) L K. L I. ergo G C. M C + G K :: L K. H K + L I. ergo G C. K M :: L K. I H. vel G K. K M (:: G H. H N, vel G A. A C, vel G D. D K) :: L I (I K). I H. Hinc

2. *Coroll.* L K. H K :: G A. A K. & dividendo L H. H K :: G K. A K. Et ſimili diſcurſu

E X X B } :: G K. A K :: L H. H K.
ly. yb. }

Porro, quia L I. I H :: G A. A C. erit inversè componendo I H. L H :: A C. G C. Item L H. H K :: G K. A K. atqui I H. H K = I H. L H (A C. G C) + L H. H K (G K. A K)

3. *Coroll.* I H. H K = A G. G C + G K. K A.

Quòd ſi baſe K G fiat altera parabola G I K, ſimilis prioribus, ſimiliter

ler erit $\left\{\begin{matrix} XB.BZ \\ yh.\ bi \end{matrix}\right\} = AG.GC + GK.KA = IH.HK.$

Prop. X.

Fig. 257. Fig. 258 *Recta portio* (A B C) *conoidis rectanguli, quando levior humido habuerit axem* (B D) *majorem quàm ut ad eam* (K N) *quæ usque ad axem proportionem habeat, quàm* 15 *ad* 4, *in humidum demissa, ita ut basis ipsius* (A C) *non contingat humidum; nonnunquam quidem recta consistet, nonnunquam inclinata; & interdum adeò inclinata, ut basis ipsius in uno puncto contingat superficiem humidi; idque in duabus dispositionibus, interdum quidem ita ut basis in humidum magis demergatur, interdum verò ita ut superficiem humidi nullo modo contingat, secundum proportionem quam habet ad humidum in gravitate. Eorum quæ dicta sunt singula inferiùs demonstrabuntur.*

Sit gravitas portionis ad gravitatem humidi ut Zq ad B Dq; sitque $BK = \frac{2}{15}BD$; & $KV = \frac{4}{15}BD$, & K N (⊐ KV) ea quæ ad axem; & $DT = \frac{1}{2}KN$.

a *hyp.*

b *constr.* 1°. Si Zq. B Dq non ⊐ B Tq. B Dq. quoniam $BT = BD - \frac{1}{2}KN$, in humidum demissa portio A B L non nisi recta consistet, juxta 4 hujus.

c *vid. sch. 5. de quad. parab.* d *ibid.* e 4. 6. f *coroll. 6. 2. h.* g 15. 5. n *priùs.* k 3 *cor. sch. 5 de quadr. parab.* l 20. *def. 5.* m

Pro sequentibus jungatur A B, quam secet V C ad B C parallela. Item bisecta A B in μ ducantur Cγ, μν ad B D parallelæ: tum ad basibus ad A C diametrisque Cγ, μν describantur parabolæ A Cα, A μ D; quarum A Cα transibit per K, (nam D A. V C (D γ) :: BD. BV :: 15. 6. & dividendo A γ. γ D :: 9. 6 :: 3. 2 :: B D. B K). Producatur N ε ad D A parallela, occurrens sectioni A Cα, punctis δ, ε. per quæ ducantur θδζ, κελ ad B D parallelæ. Estque Aα. αC :: 4. 10 :: 2. 5. (nam posito AC = 10, vel AD = 5, erit Aγ, vel γα = 3, & γD = 2, unde Dα = 1, & αC = 4. itaque θδ. δϖ (Cα. CA + AD. Dα) = 2. 5 + 5. 1 = 2. 1 :: κε. εξ. denique ducantur tangentes θφ, κψ.

Conclusio 2.

Si portio (A B C) *ad humidum in gravitate minorem quidem proportionem habeat, quàm quadratum* B T *ad quadratum* B D, *majorem verò quàm quadratum* θϖ *ad quadratum* B D, *demissa in humidum adeò inclinata, ut ipsius basis* (A C) *non contingat humidum, inclinata consistet, ita ut basis superficiem humidi nullo modo contingat, & axis* (B D) *cum humidi superficie* (E F) *angulum faciat majorem angulo* (φ).

Nam

Nam quia Zq. B Dq. $\left\{\begin{array}{l}{}^{a}\sqsubset \theta\varpi q.\ B\,Dq \\ \sqsupset B\Gamma q.\ B\,Dq\end{array}\right.$, [b]erit Z $\left\{\begin{array}{l}\sqsubset \theta\varpi \\ \sqsupset B\Gamma.\end{array}\right.$ quare si inter sectiones A B C, A μ D aptetur ad B D parallela recta G H [c] = Z, cadet hæc inter B D, & $\theta\varpi$: per H ducatur recta A F, quæ humidi superficiem repræsentet. Itaque G H est diameter demersæ portionis A G F. ducatur tangens G Q, sitque G L = $\frac{2}{3}$ G H, ([d]unde L est centrum portionis A G F), ducatúrque L K M, [e]sic ut M sit centrum partis extantis, & ob G L [f] = 2 L H, erit G O $\sqsupset$ 2 O H, quare O cadit supra L; & cùm portio A B C [g]feratur juxta rectam K O, pars demersa attollatur per illi parallelam L R, altera deprimatur secundum M S; quiescat tandem, ut humidi superficies sit E F, eique parallela tangens X Y, constátque esse ang X Y B [h] $\sqsupset$ ang Q [h] $\sqsupset$ ang φ. *Q.E.D.*

a *hyp.*
b 10. 5.
c *corol.* 8. 2 *b.*
d 3 *lemm.* 2 *b.*
e 8. 1 *æquip.*
f *constr.*
g 2 *hypoth.* 1. *b.* & 2 *lem.* 1. 2 *b.*
h 16. 1.

Concl. 3.

Si portio (A B C) *ad humidum in gravitate eam habeat rationem, quam quadratum* $\theta\varpi$ *ad quadratum* B D, *demissa in humidum inclinata adeò, ut basis ipsius non contingat humidum, consistet & manebit ita, ut basis* (A C) *in uno puncto humidi superficiem* (A ϖ) *contingat, & axis cum superficie humidi angulum faciat angulo* φ *æqualem. Quod si portio ad humidum in gravitate eam proportionem habeat, quàm quadratum* $\varkappa\xi$ *ad quadratum* B D, *in humidum demissa, & posita inclinata adeò, ut basis ipsius* (A C) *non contingat humidum; consistet inclinata, ita ut basis in uno puncto humidi superficiem contingat, & axis cum ea faciat angulum angulo* ψ *æqualem.*

Nam 1°. $\theta\varpi$ ([a]Z) est diameter portionis A B *f*, ejusque centrum [b]est δ (ob $\theta\delta$ [c] = 2 $\delta\varpi$), & si per K δ ducatur recta, [c]hæc per tria centra transibit, & secundum ipsam tota portio, ipsæque partes ferentur, [d]ergo immota consistet portio. Estque ang φ = ang A $\varpi\zeta$ (ob $\theta\varphi$, A ϖ, & $\theta\varpi$, B D parallelas). Quòd si portio in alio situ constituatur, centrorum situs immutabitur, neque in una recta convenient, unde commovebitur portio, donec in hunc situm restituatur. Simili discursu, si Zq. B Dq :: $\varkappa\xi$q. B Dq, erit $\varkappa\xi$ (= Z), diameter portionis submersæ, & tota portio consistet sub angulo ψ = A $\xi\lambda$ &c.

a *cor.* 8. 2 *huj.*
b 3 *lem.* 8. 2 *b.*
c 2 *lem.* 1. 2 *b.* & 2 *hypoth.* 1 *b.*
d *sch.* 8. 1 *huj.*

Concl. 4.

Si portio (A B C) *ad humidum in gravitate majorem quidem proportionem habeat, quàm quadratum* $\varkappa\xi$ *ad quadratum* B D, *minorem*

verò

verò quàm quadratum $\theta\delta$ *ad quadratum* BD; *in humidum demissa, & inclinata, adeò ut ipsius basis* (AC) *non contingat humidum consistet, & manebit ita, ut basis in humidum magis demergetur.*

Simili ferè discursu probatur, quo secunda conclusio inter parabolas ABC, AμD aptando GH (= Z;) quæ in hoc casu cadet inter

a *hyp.* & 10.5. $\theta\varpi$, $\varkappa\xi$, quia Z [a] $\left\{\begin{matrix}\sqsupset\theta\varphi\\ \sqsubset\varkappa\xi\end{matrix}\right\}$. Eritque tum (in situ AGF) GO $\sqsubset$ 2OH, & propterea punctum O cadit inter centrum L, & H; neque consistet humidum in illo situ, sed quum basis magis demergitur.

Concl. 5.

Fig. 239. *Si portio* (ABC) *ad humidum in gravitate proportionem habeat minorem, quàm quadratum* $\varkappa\xi$ *ad quadratum* BD; *demissa in humidum, & posita inclinata adeò ut basis ipsius* (AC) *non contingat humidum, consistet inclinata, ita ut ipsius axis* (BD) *cum humidi superficie angulum faciat* (Q) *minorem angulo* ψ, *& basis* (AC) *nullo modo superficiem humidi contingat.*

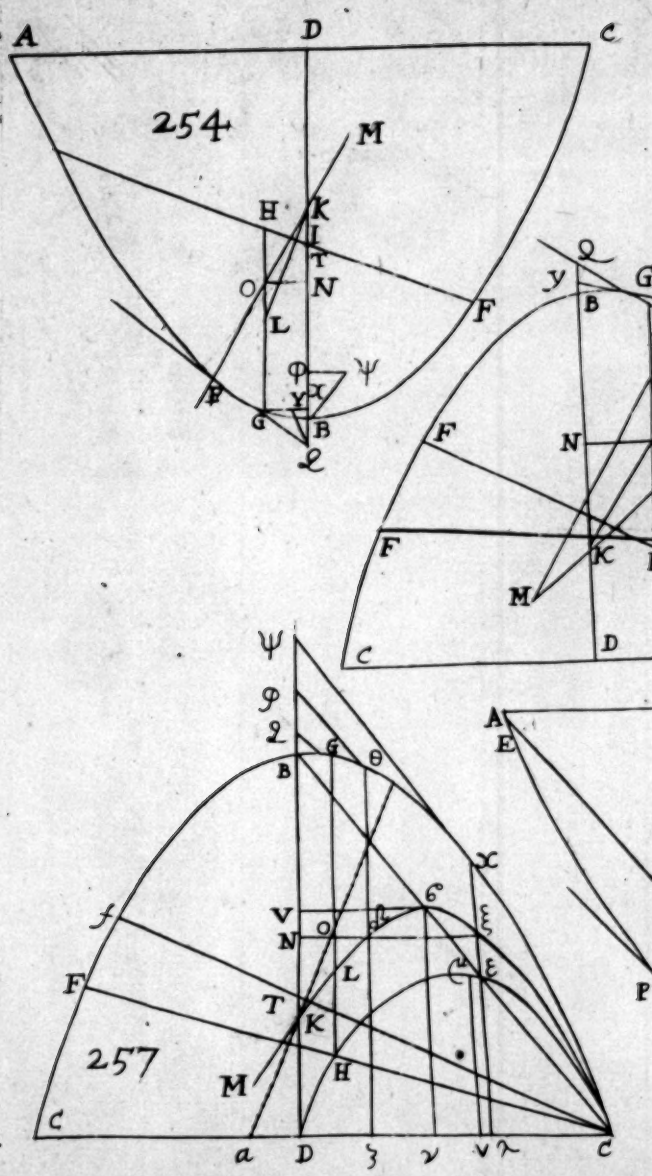
Probatur itidem ut 2da, aptando rursus GH = Z, & hic in situ AGF erit GO $\sqsupset$ 2OH, & punctum O cadet inter centrum L, & verticem G. itaque ut consistat, inclinari debet.

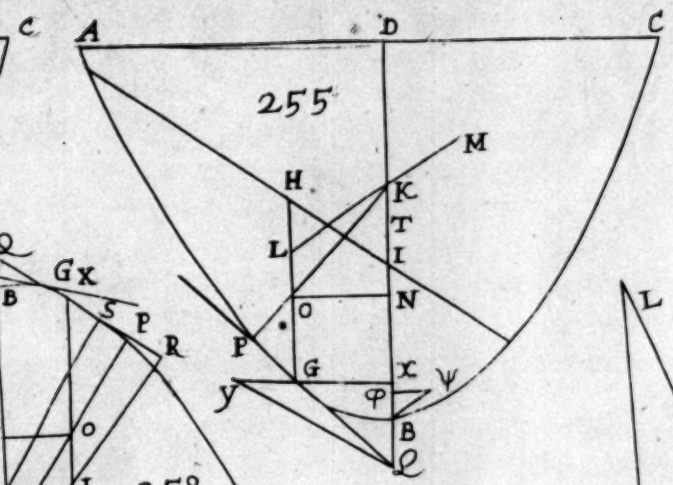
Liquet verò in hoc casu positâ EF superficie humidi consistentis, GH diametro portionis EGF, GQ ad EF parallelâ, esse ang Q $\sqsupset\psi$.

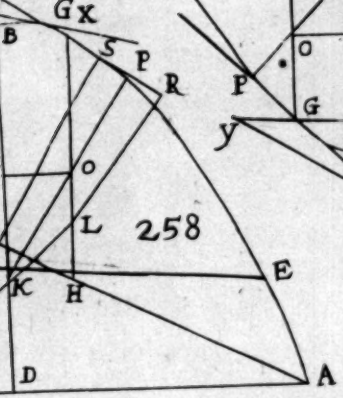
Nam si ang Q $\sqsubset\psi$, [a] erit idcirco punctum Q inter B, & ψ, [b] & punctum G inter B, & $\varkappa$. [b] unde GO $\sqsubset\varkappa\varepsilon$. Atqui $\varkappa\varepsilon$ [c] $= \frac{2}{3}\varkappa\xi$ [d] $\sqsubset \frac{2}{3}$ GH $= \frac{2}{3}$ Z. unde GO $\sqsubset \frac{2}{3}$ GH. [e] unde O non erit centrum portionis EGQ. quare portio ABC non consistet, contra hypothesin.

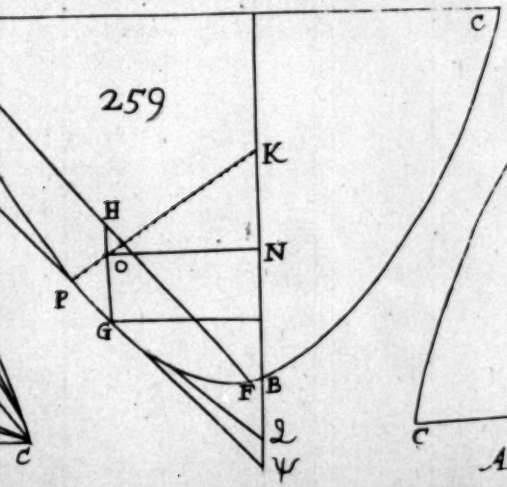
a 16. 1.
b *ex.* 35.1 *Apol.*
c *supra.*
d *constr.*
e 3 *lem.* 1. 2 *h.*

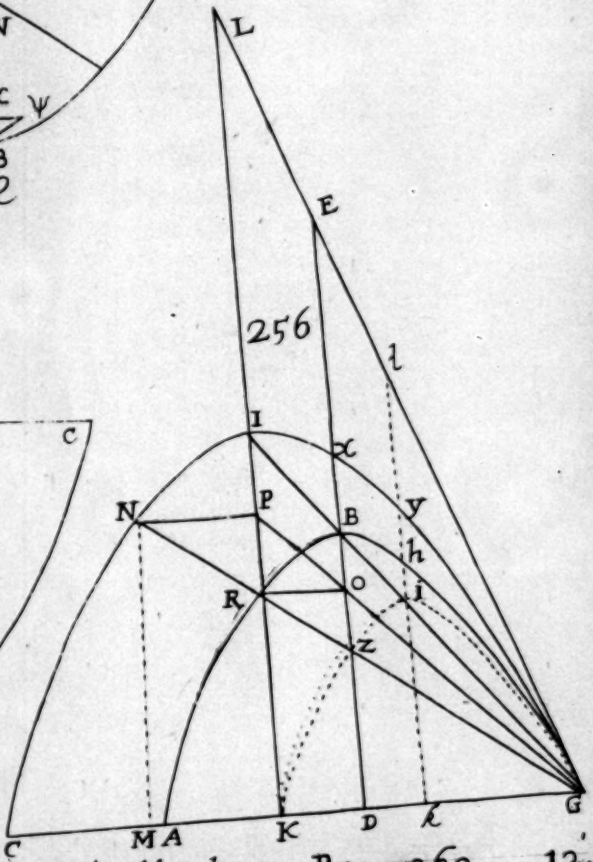
FINIS.


254
257


A
D
C
255
M
H
K
T
L
I
N
O
P
G
X
ψ
φ
y
B
Q


Q
G
X
B
S
P
R
O
L
258
E
K
H
D
A


C
259
K
H
N
O
P
G
F
B
Q
ψ
C


L
E
256
l
I
α
N
P
B
y
h
O
R
i
z
G
C
MA
K
D
ℓ

2

a *hyp.*

Fig.

a 16.
b *ex.*
c *sup*
d *co*
e 3 *le*

LEMMATUM ARCHIMEDIS, *quæ vocantur, Editio Nova.*

PRÆFATIO.

HÆC مَأخُوذَات *Machuddt*, ſive *Lemmata Archimedis*, quorum pars magna uſum habet atque elegantiam, nè penitùs interirent inter *Motawaſſetât* مُتَوَسِّطَات i.e. libellos inter Elementa *Euclidéana* grandémque *Ptolemæi* Syntaxin medios, (quos *Alexandrini* jam olim μικρὸν Ἀστρούμενον appellitabant,) adſervare maluerunt *Arabum* Mathematici: quod præter præfationem *Abi'lHaſan*, duo Codices Bibliothecæ *Bodleianæ* nimio ſatis comprobant. De *Græcis* tamen minùs emendatis quingentis penè abhinc annis *Arabica* fecit Vir Cl. *Thabetus Corraides*. Poſtea Notis ſuis nè vix adornavit is quem dixi, *Abu'lHaſan* (vel *Abu'lHonein*, ut aliqui volunt proclivi errore) *Ali Ebn Ahmed Naſvæus* ابو الحسن علي بن احمد النسوي. Quinetiam Latinè nunc ea leguntur ex duplici verſione, alterâ quidem Celeberr. V. D. *Johannis Gravii*, quæ cum animadverſionibus pauculis *Sam. Foſteri* Præle&toris *Greſhamenſis* ſæculi hujuſce devergentis anno LIX. *Londini* prodiit, mox alterâ *Abrahami Ecchellenſis*

lensis, quam suis adnotatis illustravit, atque adeò *Florentiæ* edidit egregius Mathematicus *Alf. Borellus*. Valdè autem miror virum præclarum alterumq; planè *Siciliæ* decus, de istorum Lemmatum Authore tam anxiè disputare: dummodo constat, ut nihil certius, Lemma omnium primum illud esse quod ad Tactiones *Apollonianas* suo ex ingenio posuit *Pappus*: tum quartum quintúmve nè vix ab eis differre, quibus Theorematum Floridorum Conditor Propositionem ἀρχαίαν sed nulli certo Authori redditam (hanc in Lemmatum horunce sextum ita conjectam hodiéq; legis) illustratam voluit, nim. *Prop.* XIV. & XVII. *Arabes* autem, quibus *Archimedis* nomen in Mathesi præ cæteris clarius fuit notiúsque, vocabula ipsa ἄρβηλον & σελήνιον (*Lem.* 4. & 15.) summo viro retulere; quanquam *Pappus*, cujus fortean de scriptis *Eutocius* (sic amat) pleraque hæc Lemmata carpserat, simpliciùs paulò dixerat, χωρίον ὃ δὴ καλοῦσιν ἄρβηλον: de voce alterâ certa est fides diu ante *Archimedem* natum apud Geometras valuisse. *Opus potius esse mixtum reor, atque ab uno vel altero Theoremate sive *Archimedis* sive *Apollonii*, (talia enim ultrò inducit Doctrina Tactionum,) certè perantiquo, cæteris omnibus, ut audent scioli, hominis pænè Divini nomen additum inscriptúmque. Lemmatum verò suorum libellum scripsisse olim *Archimedem* nullus putem aut voluisse. Isthæc ita præcipuæ modò Propositioni præmittere solet, modò ἐπὶ τέλει subjicere. Quod ad quartum alterius libelli περὶ σφ. καὶ κυλ. conqueritur *Eutocius*, minus innuit quàm viro docto perplaceat: plerisque puta Exemplaribus Operum *Archimedis* binorum Lemmatum tam ἀνάλυσιν quàm σύνθεσιν, quas ad *Prop. IV.* pollicitus erat, malè excidisse; tum duo illa Theoremata (plura nè cogites) quæ fortè repererat *Eutocius* adeò fuisse propter Scribam malehabita, corrupta & defor-

**Ii homines huic etiam tribuerunt libellum, qui erat* Zenodori *de Isoperimetris, imò fragmentum de Statica, atque alia.*

deformia, ut pro *Archimedéis* accipere quæ erant *Archimedis*, omninò ſubvereretur. Sed præfari multis haud decet. Breviculus enim ex ſe liber iſte eſt, & hoc compendio adhuc brevior.

Id verò ſubmonendum puto, Schemata quæ heic vides ab Autographis Præſtantiſſimi viri D. *Jac. Golii* fuiſſe expreſſa; ſive in meliores codd. incidit ille, quàm *Abr. Ecchellenſis* atque ego vidimus, ſive potiùs ingenio ac eruditione ſuis plus maximo potuit. Verùm de tanto viro, déque filii ejus erga me meritis tum dicam quæ ſentio ipſe, & omnes ſcire oportet, quando adhuc alia quàm ſtricturas ſcripſero & Epitomas.

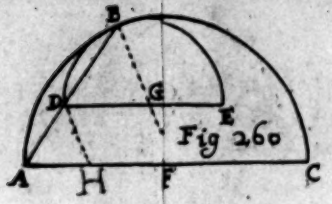


Fig 260

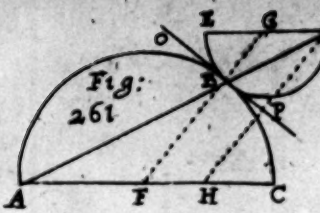


Fig: 261

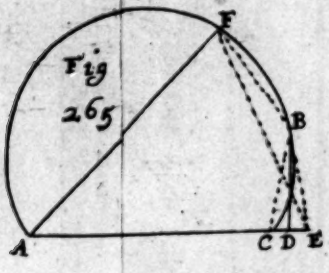


Fig 265

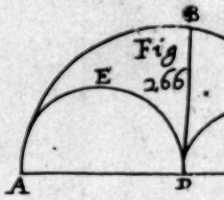


Fig 266

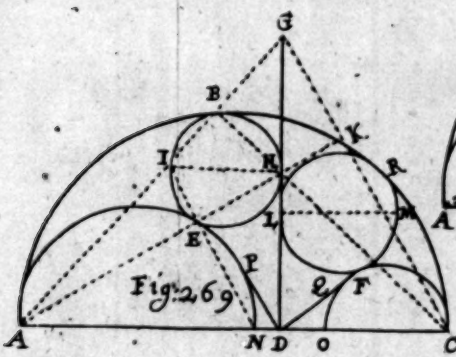


Fig: 269

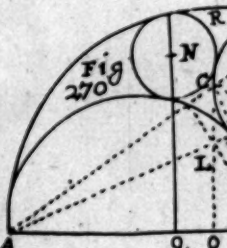


Fig 270

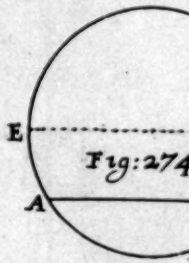


Fig: 274

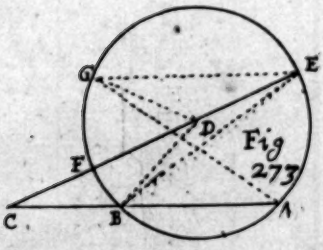


Fig 273

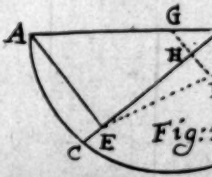


Fig:

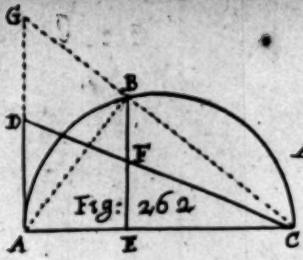


Fig: 262

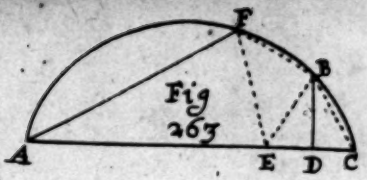


Fig 263

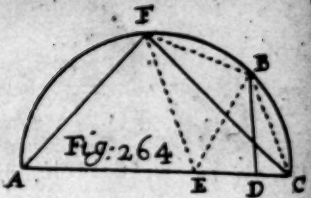
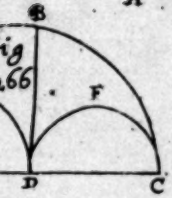


Fig: 264



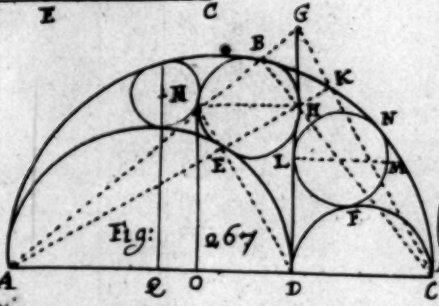


Fig: 267

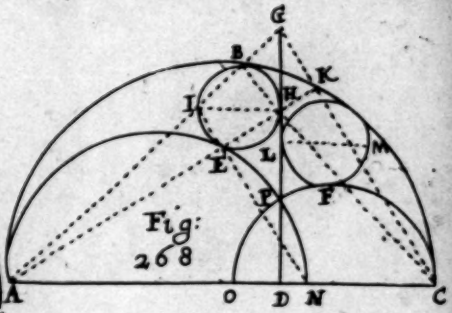
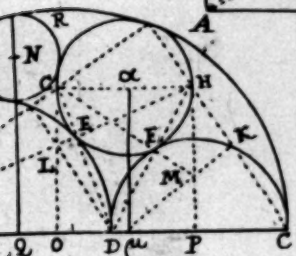


Fig: 268



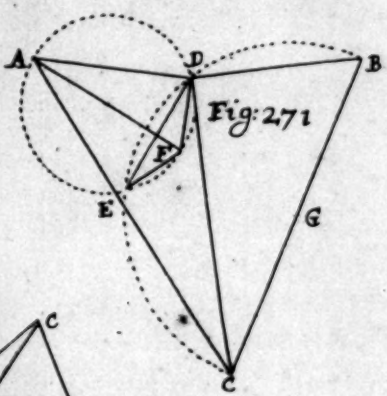


Fig: 271

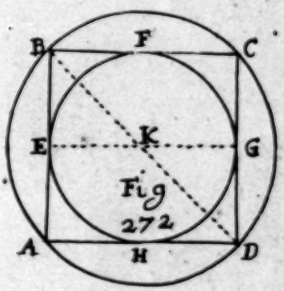
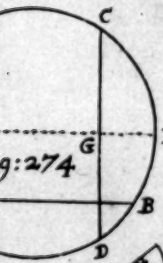


Fig 272



g: 274

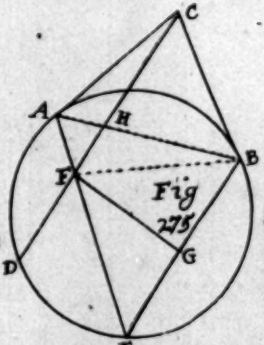


Fig 275

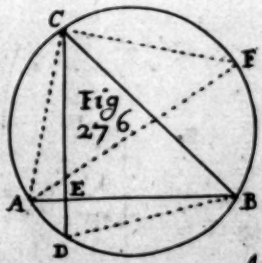


Fig 276

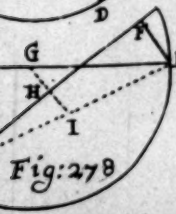


Fig: 278

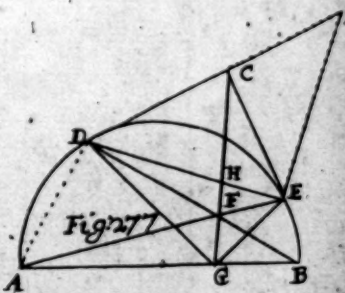


Fig: 277

ARCHIMEDIS LEMMATA.

Lemma I.

Binorum circulorum A B C, D B E, *ſeſe intra extrave tangentium in* B *diametri* A C, D E *invicem parallelæ ſint; recta linea eſt quæ per* A D B *tranſit.* Fig. 260. 261.

Adjunctæ rectæ [a]F G B æquidiſtet [b]D H. Jam propter æquales H F [c], D G [d], G B, necnon [d]F A, F B; erit H A = [c]F G = [c]D H, & [f]A D H = A. Atque ob pares [g] B G D, B F A, D H A, erunt [h] B D G + B = A + A D H = 2 A, & B D G [k] = A. Unde [l]A D G + A [g] = 2 rect = A D G + G D B. Recta igitur [m] linea eſt A D B. Aut in fig. alterâ, Unde [l]A B G + A(=[n] F B D + H D B) [g] = 2 rect = A B G + (B D G [f]) G B D, & A B D [m] recta eſt.

a 11, 12, 3.
b 31. 1.
c 34. 1.
d 15. *def.*
e *ax.* 3, 2.
f 5. 1.
g 29. 1.
h *cor.* 32. 1.
k *ax.* 7.
l *ax.* 2, 1.
m 14. 1.
n 15, 29. 1.

Notæ.

Hoc lemmate *Prop.* XXIV[am] Operis *Apollonii* περὶ ἐπιπέδων jam olim illuſtrabat *Pappus*, ut videre eſt *Prop.* CX. LVII[mi] Συναγωγῶν. Commonſtrat verò (connexis radiis G B, F B, & ipſis G D, F C invicem parallelis) tam F B G quàm A B D rectas eſſe, apodixi probâ quidem (contra quam putat Vir doctus,) & eleganti. Ecce illam!

Eſt enim ductâ tangente O P, G B O° = recto° = O B F, atque [n] G B F recta. Et, quia [p] D G. G B :: B F. F A, & D G B [g] = B F A, erit [r] G B D = F B A. Recta autem eſt G F, ergo [s] A B D etiam recta.

o 18. 3.
p *def.* 15. *ax.* 5.
r 6. 6.
s *ſch.* 15. 1.

Conſimile autem Lemmation Cl. *Comandinus* Propoſitioni XIV. Libri Quarti Collect. *Pappi* addidit, ut opus fuit, quod vide. Verùm id jam obiter monitum velim, Propoſitionem illam XIV *Pappi* eandem omninò fuiſſe (ſic reor) cum XXIV[ta] Geometræ *Pergæi* de

Tactionibus, atque adeò utramque minimè differre abs horum Lemmatum Quinto; omnes equidem ipsas eadem Lemmatia, Illustrationes easdem, ut probè constent, expoſcere.

Casum duntaxat facillimum expoſuit *Abu'lHasan*, parùm quidem peritè, ubi A D B, F G B diametris A C, E D rectè insistant, nempe (H—A) A D H + recto H D G + G D B (G—B) = 2 rectis. recta igitur ipsa A D B.

Lemma II.

Fig. 262. *Si semicirculum* A B C *à puncto* D *tangant rectæ* A D, D B, *& deducatur* B E ⊥ A C : *connexa* C D *ipsam* B E *bifariam secabit in* F.

a 31. 3. & 13. 1
b 18. 3. & 28.
c cor. 36. 3.
d 5. 1.
e 29. 1. et 4. 6.
f 14. 5.
g cor. 32. 1.
h ut modò.
k ax. 3.
l 6. 1.

Occurrant invicem [b] C B, A D protractæ in G, & jungatur A B. Quia (ob pares [c] A D, D B,) A B D sive [d] B A D + D B G = recto G B A [e] (A B C) = [f] B A D + G, erit G B D [g] = G D. & [h] G D = (D B [k] =) A D. Atqui propter parallelas A D, E B, erit D A . F E [l] :: (D C . C F ::) G D . B F. Quare [m] E F = F B.

Notæ.

1. Paria heic peccavit Adnotator *Nasvaus* atque in præcedente Theoremate; scil. è casubus summè obvium adduxit, quando Cathetus B E ad centrum circuli A B C pertineat.

2. Hinc, ut bene monet Cl. *Borellus*, investigare licet duo polygona ordinata & similia, quorum circumscriptum inscriptum excessu quidem minori dato quovis superet, tum etiam rationem diametri ad circuli peripheriam compendio egregio eruere. Nam C E. C A :: B E. (A G) A D + D B; hoc est, perimeter polygoni circulo A B C ex semilatere B E inscripti, ad perimetrum duplo laterum numero ex latere ipso A D + D B circumscripti. Chordas verò per seq. Lemma, atque etiam proportionem licet inter A C & C E magis semper magisque minuere, eóque rationem diametri A C ad semichordam B E elicere. Quippe hinc datur B E q, & huic par A E * E C, imò datur per Lemma, quod sequitur, ipsa A E quare E C datur, atque etiam recta A D + D B. Idcirco ad peripheriam circuli (quæ quidem inter adscriptorum polygonorum ambitus mediat,) ratio diametri illicò emicat.

3. Horum Lemmatum Compilator, quisquis fuerit *Græcorum*, aut Scholiastes fortè *Arabs*, rectas A D, D G pares esse jubet, suo quasi fretus opusculo de Rectangulis, quod jam pridem periit. Istud tamen ex Elementis facillimè constat.

Lemma

Lemma III.

In circuli segmento A B C, *à quovis curvæ puncto* B *ad basin* A C *agatur perpendicularis* B D, *fiantque* D E = D C, *& arcus* B F = B C: *annexa* F A *erit æqualis ipsi* A E. Fig. 263. 264. 265.

Jungantur C B, B F, F E, E B. Est igitur E F B [c] = F E B, propter æquales rectas F B [a], (B C) [b] B E. Sed A F B + (A C B [b]) C E B [d] = 2 rectis [e] = A E B + C E B. Quare [f] A F B = A E B, & (A F B — F E B) A F E = A E F. Unde [g] A E = A F.

a 29. 3.
b *hyp.* & 4. 1.
c 5. 1.
d 22. 3.
e 13. 1.
f *ax.* 3.
g 6. 1.

Schol.

1. Hujus egregii Theorematis Casus secundus, ubi A B C est semicirculus, *Cl. Ptolemæo* rectas olim circulo applicanti pernecessarius erat. Lemma tamen, quod τὸ κατ' διχοτομίαν appellatur, cap. IX. Libri Primi Μεγ. Συντ. hâc occasione non constat modò, sed & generale evadit.

Datis scil. tam chordis quàm arcubus C A, A F, F C, adeóque semiarcu B C, quæritur ipsa B C chorda. Demissâ B D ⊥ A C, habes, ut priùs, $DC = \frac{EC}{2}\left(\frac{AC - AF}{2}\right)$. D verò rectus est, & B C D ex dato arcu (A C — C B) B A, etiam datus. Quare specie datur (per 40. Dat.) triang B D C. Dantur igitur ratione (3 def. Dat.) sed & magnitudine (2. Dat.) rectæ B C, C D. Fig. 264.

2. Rursum socors esse mavult *Abu'lHasan*; (istum enim δείξεως pravatæ insimulandum reor) & præter Authoris *Græci* ingenium, omissis reliquis casum medium ostentare.

Lemma IV.

Super A C *ejusque segmenta* A D, D C *describantur tres semicirculi* A B C, A E D, D F C, *& fiat* D B ⊥ A C: *erit figura* (A B C F D E A) *trium semicirculorum peripheriis interclusa, quam* Ἄρβηλον *vocat Archimedes, circulo circa* B D *æqualis.* Fig. 266.

Nam A Dq + D Cq + (A D × D C bis [a]) 2 D Bq [b] = A Cq. Súntque [c] circuli inter se, ut quadrata diametrorum. Quocirca [d] semicirculus A B C æquatur circulo circa diametrum B D, una cum binis

a *cor.* 13, 17. 6.
b 4. 2.
c 2. 12.
d *ax.* 7.

binis ſemicirculis AED, DFC: unde [e] Arbelon *Archimedeum*, hoc eſt, ſemicirculus ABC minus ſemicirculis AED, DFC par omninò erit circulo circa BD deſcribendo.

e ax. 3.

Notæ.

1. Cl. *Borellus* iſta verbis ſuis adnotat.

"Hæc forſan eſt una earum propoſitionum quas *Pappus* legit in "libro antiquo de menſura *Arbelis*, ſeu ſpatii à tribus ſemicircumfe-"rentiis circulorum comprehenſi, ut ait *Proclus*: quæ quidem ele-"gantiſſima eſt, ejuſque inventionis Lunulæ *Hippocratis Chii* origi-"nem extitiſſe puto. Eſt enim *Hippocratis* Lunula ſuperficies plana "à quadrante peripheriæ circuli majoris, & ſemiſſe peripheriæ cir-"culi ſubdupli comprehenſa. Arbelus verò recentiorum eſt ſpatium à "triente & à duobus ſextantibus circumferentiarum trium circulo-"rum æqualium comprehenſum; & hiſce duobus ſpatiis facilè qua-"drata æqualia reperiri poſſunt. At Arbeli *Archimedis* & *Procli* hue-"uſque reperta non eſt quadratura; ſed poteſt quidem aſſignari cir-"culus prædicto ſpatio æqualis. *Vide jam Vietam in Reſponſis.*

2. Huic figuræ nomen dedit, ut par erat, cultellus ſeu ſcalprum Sutoris, quâ formâ ſemper fuit. Unde pervetus Gloſſa, "Ἀρβηλον, Sicila: & Etymorum Græcanicorum conſarcinator, "Ἀρβηλον. σφυρὸν σκυτικὸν σκεῦος· ὅτι δὶ ἓξ ὄπλον. Imò ante iſtos Scholiaſtes *Nicandri* paulò diſertius, "Ἀρβηλοι δὲ λέγονται κυκλοτερῆ σιδήρια, ὅτε οἱ σκυτοτόμοι τέμνουσι καὶ ξέουσι τὰ δέρματα. Hæc tamen obiter; alia jam me Matheſis diſtinet. Interpreti autem Arabi ارْبِلُوس *Arbelus* dicitur tanquam de virilis generis voce *Græcâ*.

3. Hoc quartum Theorema ex *Pappi* inventis fuiſſe exiſtimo, quo ad propoſitionem ſequentem, quæ ſubtiliſſima eſt & Sene *Siculo* digna, via certior ampliórque pateret: nec adeò *Hippocrati* (hic Meniſcos quadrandi cauſam dediſſe aliquam, quin ipſum potiùs abs antiquiſſimo illo Tetragoniſmo quàm opportunè ortum fuiſſe. Ait enim *Pappus*, quam primùm expoſuerat Antiquam illam Propoſitionem, quæ proximum Lemmatum *Archimedæorum* facit, & quidem paulò ante decimum quartum Floridorum Theorematum Libri ſui Quarti, (quod minimè diſcrepat ab hoc Lemmatio,) —Διὰ χρήσεται δὲ τῷ προτεθέντι λήμματι.

Lemma

Lemma V.

Super A C *ejusque segmenta quævis contigua* A D, D C *describantur tres semicirculi* A B C, A E D, D F C, *sitque* D G ⊥ A C: *pares invicem erunt circuli* B H E, L F N, *qui Arbelo* A B C D *inscripti, tam perpendicularem* G D *quam semicirculos contingant in punctis* H E B, L F N. Fig. 267.

Duc diametrum H I: hæc autem [a]æquidistet A C, ob [b]rectam D H I [c]= A D H, atque connexa B I + I A [d]recta est. Tum conveniant A B, D G in G, convenient etenim [e]propter B A D + A D H < 2 rectis: adjuncta B H + H C, & recta est, & ad [f]A G perpendicularis, atque [d] I E + E D, & A E + E K etiam rectæ. Est autem [c]G D ⊥ D A, & juncta C K ⊥ K A, quare producta C K G recta erit. Quoniam verò E D ∥ C G, propter rectos [f]A E D, A K C, erit [g]A D. I H :: (A G. G I ::) A C. C D, adeoque [h]A D × D C = A C × I H, & argumento pari A D × D C = A B × L M. Æquantur igitur inter se diametri I H, L M, & [h]circuli ipsi I E H, L F M. *Q. E. D.*

a 28. 1.
b 19. 3.
c *hyp.*
d *lem.* 1.
e 29, 32. 1.
f 31. 3.
g 2. 6.
h 2. 12. *ult.* 1.
k 16. 6.
l *v. schol.* 1.
n 27. 3.
o 32. 1.
p 14. 1.

Scholia.

1. Sive *Græcus* ille, qui hæc Lemmata primus collegit, sive potiùs *Arabum* aliquis, quo C G rectam lineam esse ostenderet, citat Opusculum suum de Trigonis Rectangulis. Inde verò *Ali Abu'l Hasan* hoc adjumenti accepit. *v. fig.* 271. (*sive schema primum Borelli, ad paginam.* 393.)

B C ⊥ A G quod in triang A B C per F occursum perpendicularium B E, C D transit. Junge D E. Circulus A D F [i]ibit per E, ob rectum [e]A E F. Æquantur autem [n]D A F, D E F, atque [n]D E B, D C B, hoc est, B A G, D C B, & B communis est. Unde [o]A G B (C D B), [c]= recto A G C. Recta [p]igitur est C B, sive in schemate *Archimedeo* C G.

2. Deinde Adnotator *Nasvæus* cæteros casus hujusce quinti Theorematis ad mentem *Abi Sahl Cuhensis*, percelebris Mathematici, hoc ferè modo exponit. Fig. 268.

Casus secundus. Vel semicirculi A P N, O P C se mutuò secent in P. Sitque D P ⊥ A C: æquales invicem erunt circuli H E B, M F L, qui semicirculos & perpendicularem contingunt.

Æqui-

Fig. 268. Æquidistant H I, A C, & agantur A B, A H K [a] transeuntes per I, E. atque conveniant A G & D P in G. Dein jungatur recta [b] C K + K G, & I N + C B [a] transeuntes per E, H.

[a] *lem.* 1.
[b]
[c] 31.3 : 28.1.
[d] 2.6.
[e] 16.6.
[f] *cor.* 13.17.6.
[g] 19.5.
[h] *ut prius.*
[k] *ult.* 1 : 2.12.

Propter parallelas [c] C K N I, est [d] C A. C N :: (A G. G I ::) A D. H I. adeóque [e] C N × A D = C A × H I. Verùm C D × D O = [f] D Pq = A D × D N, atque [g] C N. D A :: (N D. D O ::) C N. O A. Quare [h] C D × O A = D A × C N = C A × H I. Paritérque C A × L M = C D × O A. Unde æquantur & diametri L M, H I, & circuli [k] M F L, H E I.

Casus tertius. Vel semicirculos jam disjunctos A E N, O F C tangant partes rectæ D F, D P; æquantur circuli H E B, M F L, qui tam semicirculos quàm perpendicularem à tangentium occursu (D) erectam contingunt in punctis E, B, H, & F, R, L.

Æquidistent A C, H I, L M diametri, & jungantur C B, I N, rectæque A H K, C G transeuntes per H, E, & K; quia [a] C G ‖ C N, erit [d] A D. H I :: (A G. G I ::) A C. C N, adeóque A D × C N = A C × H I. Ac pariter C D × A O = A C × L M. Est autem [l] C D × D O = (D Qq = D Pq) A D × D N, atque C D. A D :: (D N. D O ::) [m] C N. A O. Quocirca A D × C N = (C D × O A) = A C × H I = A C × L M = C D × O A. Pares igitur invicem sunt diametri L M, H I, circulique [k] L F M, H E I.

[l] 36.3.
[m] 18.5.

Lemma VI.

Fig. 270. *Circuli* E F B, *qui tres semicirculos super* A C, A D = $\frac{r}{s}$ D C, *& ipsam* D C *descriptos contingit, diameter* G H *diametro* A C *æquidistet; quaratur autem proportio diametrorum ad invicem.*

Ductis rectis A G, G B, C H, H B, H E, E A, G F, F C, item D G, D H, D I, D K, G L O, H M P, erit G O ⊥ A O, & H P ⊥ A C.

Et (propter H G, D K, D I ‖ A C, A B, C B) erit O P. P C :: G M. M C :: A D. D C :: A L. L H :: A O. O P :: O P. P C, hoc est, $\frac{r}{s}$ P C. P C.

Unde aggregatum ex 3 continuè proportionalibus,

$$\frac{r^2 PC^2}{s^2 PC} + \frac{rPC}{s} + PC. \frac{rPC}{s} :: AC. PO = GH.$$

Ex.

Ex. gr. (sic enim vult Arabs) sit PC = 4. Erit OP = 6, OA = 9, adeóque diam. AC. GH :: 19. 6.

Adnotata in Lemma V & VI.

§ 1. Lemmatum *Archimedis* quod putant, quintum ex *Pappi* inventis assumptísque transcriptum est, quâ arte illustrius esset id quod sequitur.

Præmonet adeò, priusquam ostenderet principem illam veteremque propter quam appellitat ex vett. membranis, Libro *IV.* Floridorum *Prop. XIV.* eisdem positis quæ in Schemate nostro 270, & ab α deductâ α μ ⊥ AC & = GO, esse μ D . ½ HG :: AD — DC . AD + DC.

Rectæ etenim sunt [a] AEH, GED, CFG, DFH; similiáque trig. [b] DEA, DOG, itemque DHP, DFC, quare AD. DE :: GD. DO, & ADO = EDG: pariter DC. DE :: HD. DP, & CDP (= HDE = EDG) = ADO.

Unde AD . DC :: PD . DO. & componendo convertendoque AC . AD — DC :: PO = GH . PD — DO :: Pμ = ½ GH . ½ PD — DO. *Q. E. D.*

Syntheorema 1. Tum propter sim. trigona DOG, (DEA,) HPA, erit DO . OG :: HP . PA, & DO * PA = GO * PH = HPq = Q. α μ.

2. Imò, quia CD . DA :: OD . DP. erit componendo tam AD . AC :: PD . PO. & diam. AD * (PO) GH = PD * AC. quàm CD . AC :: OD . PO. & diam. CD * (PO) GH = DO * AC.

§ 2. Deinde *prop. XVII. l.* 4. quæ decimam sextam ejusdem adjuvat, ut DHq. HIq :: AC . CD. Ponantur eadem quæ in Figurâ 267. fiatque IO ⊥ AC, Rectæ gr. sunt [a] HEA, IED, & propter ea CA * AO = [a] (coeuntibus D, P.) ADq. [b] AC. (AC — AD) DC :: AD. (AD — AO) DO = HI :: (obsim. trigona [c] AED, HEI) DE. EI :: [b] DEq. EHq :: [f] DHq. HIq.

Est etenim propter IHD [i] rectum, & [k] HE ⊥ DI; [l] DE . EH :: HE . EI :: DH . HI.

Hinc statim constat horum Lemmatum quintum, viz. [m] AC . DC :: ⊙ circa DH. ⊙ circa HI pariter, AC. AD :: ⊙ circa DH. ⊙ circa L M. Æquantusque [n] circuli ad HI, LM. Quod ex *Pappo* comprobatum volui.

a *Lemma* 1.
b 31, 3. 32, 1. & 4. 6.

a *per præced.*
b 17. 6 : 19. 5.
c 34. 1. *elt.*
d 4. 6.
e 31. 3 : 29. 1.
f 22. 6.
g 8. 6.
h 20. 6.
i 18. 3.
k 31. 3.
l 12. 2.
m 19. 5.
n *Lem.* 1.

§ 3. Propositio autem illa Antiqua & *Archimedea*, quam vocant, talis erat referente *Pappo lib. 4. prop. XVI.*

Tres semicirculos in spatio *Arbelico* tangat circulus G F H, ipsum verò binósque semicirculos alter circa N etiam tangat, atque ita porro. Erit $\alpha\mu = GH$, & $QN = 2RI$, &c. juxta naturalem numerorum seriem. (Ponantur ea quæ in Schem. 270.)

a § 1. *fcb.* b 16. 6. c 17. 5. d 19. 5. e 17. 6. *fnlt.* 1. g 34. 1. h 15. *Papp. l.* 4.

1° Æquantur [a] CAO, PAD, atque ACP, OCD, unde [b] AD. AC :: AO. AP, necnon AC. CD :: OC. CP. Quare, [d] AO. (PA—AO) OP :: AD. DC [c] :: OP. PC, & [c] OPq = AO × PC [d] = Q: $\alpha\mu$. Ergo [f] $\alpha\mu = (OP)$ [g] = GH.

2. Et, quia [h] $\frac{a}{i} = \frac{\alpha\mu + GH}{GH} = \frac{NQ}{RI}$ 1 erit QN = 2 RI.

Et sic deinceps.

9. 10.

3. Quinimo si fuerint AC, DC in fig. 267. inter se sicut numeri quadrati, [i] erit DH commensurabilis diametro HI, aliàs non. Nam per § 2 universè, $\frac{AC}{CD} = \frac{DFq}{HIq}$. Sit igitur $\frac{AC}{CD} = \frac{a}{i}$, erit DF = 2HI: pariter QN = 3RI, &c. juxta volgatissimam numerorum consequentiam.

4. Quæ est *Pappi* propositio *XVIII.* Manifestum etiam est, si circuli *f*, *g*, *h*, & semicirculos ADE, ABC, sèque invicem tetigerint, fueritque Cathetus *fn* æqualis radio, fore *go* = 2*gi*, & *hp* = 5*hq*, &c. juxta numeros deinceps impares. Nam per § 3. $\frac{fn + \alpha fn}{\text{diam.}} = \frac{go}{2gi} = \frac{1}{2}$, & *go* = 2*gi*, &c. (vide fig. 282. sive illam *Pappi* ad *XVIII pr. lib.* 4.)

Lemma VII.

Fig. 272.

Circulus ABC *quadrato* AC *circumscriptus duplus est inscripti circuli* EFG.

a 34. & *ult.* 1 b 47. 1. c 2. 12.

Ductâ [a] etenim diametro EG ‖ BC, erit diam. BDq [b] = (2BCq) 2EGq, & circulus circuli duplus.

Adnotat *Abu'lHasan Nasvaus*, tanquam ex libello quem de Circulo fecit, tritum illud,

Vis $\frac{n}{s}$ polygoni sive circuli dati BHG. Habes latus aut diame-

trum

trum EG, & $\frac{r}{s}$EG, necnon (per 13. 6.) quadratum par rectangulo $\frac{EG^2 r}{s}$. unde, EG. $\frac{EGr}{s}$ :: EG². $\frac{EG^2 r}{s}$ :: [e] circulus datus quæsito :: per 20. 6.

Lemma VIII.

In circuli ſecante AC *ſtatuatur* BC *par radio, & per circuli centrum* D *agatur* CE: *arcus* AE *triplus eſt ipſius* BF. Fig. 273.

Ductis enim EG ∥ AB, radiiſque DG, DB: erit DGE[a] = DEG $\left(\frac{GDF}{2}\right)$[c] = C[a] = FDB[d] = $\frac{1}{3}$GDB, & arcus BF[e] = ($\frac{1}{3}$BG)[f] $\frac{1}{3}$AE, ob AGE[c] = GAB. unde conſtat propoſitum.

Alf. Borell. hoc fermè modo. Adjunctâ EB, erit (BDC)²C = 2DEB²(E + EBD): unde ABE[b] = C + E[c] = 3E, & arcus AE[e] = 3BF.

Quod in hoc theoremate ponitur, datæ peripheriæ *rectum*, quod vides, inducit, atque ita Geometriam planam, ut ritè conſtruatur, omninò ſuperat. Id tamen facili opere præſtat *Solida*, multóque adhuc plura *Linearis* quam vocant.

Lemma IX.

In circulo binæ quævis chordæ AB, CD *ſeſe ad angulos rectos ſecantes, intercludunt arcus* AD + CB, *pares arcubus* AC + DB. Fig. 274.

Agatur diameter EF ∥ AB, eſt igitur GD[a] = GC, AE[b] = BF, & AE + AD[c] = EC. unde ſemicirculus CF + EA + AD = CF + FB + AD[c] = AC + DB.

a 3. 3.
b *cor.* 26, 3. & *conſtr.*
c *cor.* 28, 3.
d *ax.* 1. *def.* 17.
e *ax.* 7.

Lemma X.

Circulum AEB *tangant rectæ* CA, CB, *ſecent verò* CD, *& huic parallela* BE, *& connexa* AE *ſecanti* CD *conveniat in* F: *Cathetus* FG *biſecabit ipſam* EB. Fig. 275.

Junge AB, eſt igitur CAB[a] = (AEB) [b]AFC, & D communis utrique triang[b] CAF, AHC; unde [c]FC. CA :: CA. CH, &

a 32. 3.
b *conſtr.* 29. 1.
c 32. 1 : 4. 6.

d 17. 6. & d F C e C H = C Aq f = C Bq. Quia f verò F C. C B :: C B; e cor. 36. 3. & < g D communis, erit < g C F B = g (C B H h = G A B k) f cor. 17. 6. A F C. Sed (C F A) F E B k = F B E h (C F B), angulíque l ad G rec- g 6. 6. ti, atque latus G F commune; quare E G l = G B. h 5. 1. k ax. 1. l 26. 1.

Lemma XI.

Fig. 276. *Circuli diameter* A F *poteſt quadrata ex ſegmentis binarum chordarum* A B, C D, *ſeſe ad angulos rectos ſecantium in* E.

a ax. 12 31. 3. Jungantur A C, A D, C F, D B. Propter A E D a = A C F, & b 27. 3. A D C b = A F G, erit C A F c = D A E, & tam curva quàm re- c cor. 32. 1. cta C F d = D B. Unde A Fq e = C Fq e (D Bq) + A Cq, hoc d 26, 29. 3. eſt, f D Eq + E Bq + A Eq + E Cq. e ult. 1. f 47. 1. g cor. ult. 6.

Schol.

Ali Naſvæus hoc modo: annexis A D, D B, B C. In triangulo D E B, E = recto e = B + D, & arcus D A + B C g = ſemicir- culo. Poteſt ideò diameter utraque d D Aq + B Cq, hoc eſt, qua- drata ex A E, E D, E B, E G.

Lemma XII.

Fig. 277. *Semicirculum tangant* C D, D E, *rectaque* C G *tranſeat per* F *interſectionem ſubtenſarum* D B, E A, *quæ tactus* D, E, *& diametri terminos* A, B *connectant. Erit* C G ⊥ A B.

a 31. 3. Junge D A, E B. Erit ang. a rectus A D B b = D A B + D B A b cor. 32. 1. = B E F. Et (C D B) d D A B + A B F + F B E = D A B + c 2 ax. (C E F) d A B E c = B E F + F B E b = D F E c = C D B + C E F. d hyp. & 32. 3. Unde C F l = C D: atque eſt D A G d (C D F g = C F D) + e ax. 1. D F G = 2 rectis = a recto (A D F) + F G A. Quare k C G ⊥ f ſchol. A B. g 5. 1.

Schol.

1. In Demonſtratione ut pares ſint C F, D C, provocatum eſt ad opuſculum, quod hodie nuſquam eſt, *de Tetrapleuris*: ſupplet tamen τὸ ἰλλειπὲς *Abu'lHaſan* Adnotator hunc in modum.

h 13. 1. Vis C F > D C = C H. Eſt igitur (connexis D H, H E,) C D H k 10 def. 1. g ſeu D H C l > D F C, & C E H ſive C H E l > C F E: quare l 16. 1. D H E

DHE = CDH + CEH majore CDF + CEF, pars toto: Rursum ais CF < DC = CG. Erit pariter (jungenti DG, GE,) DGE, hoc est, CDG + CEG minor CDF + CEF, totum parte. Ergo CF = CD.

2. *Cl. Borellus* Methodo idem directâ commonstrat, hâc puta.

Fac CN = CE, & adjunge NE. Anguli igitur [m] plani NDFE valent quatuor rectos, atque anguli [n] oppositi EFD (CDF + CEF) + N [s] (CEN) = FDN + FEN = 2 rectis. Quare circulus ex centro C (ob [o] CN = CE = CD) plano NEFD circumscriptilis [p] auferet [q] CF = CD.

m *sch.* 32. 1.
n *ax.* 3.
o 19. 3.
p 22. 3.
q *def.* 15.

Lemma XIII.

Catheti AE, BF, *à diametro circularis extremis* A, B *cadentes, exsecante à diametro* CD *segmenta* CE, FD *invicem æqualia auferunt.* Fig. 278.

Junge EB, & per centrum G adige GI ∥ AE, quæ bisecat [a] CD & æquidistat ipsi BF. Erit (ob AG = GB) EI [b] = IB, & EH [b] = HF. Et HD (HC) minus HE æquales ipsi FD [c] = FE.

a 3. 3: 30. 1.
b 2. 6.
c *ax.* 3.

Lemma XIV.

Super AB *ejusque paria segmenta* AC, DB, *atque sub intersegmento* CD *describantur quatuor semicirculi, & per* E *centrum circulorum* AFB, DGC *pertrahatur,* FG ⊥ AB: *Circulus circa* FG *æqualis est figuræ curvilineæ* AFBDGCA, *quam Salinon appellat Archimedes.* Fig. 280.

Sunt enim diam. FG q [a] (DA q) + CA q [a] = 2 DE q [b] (CE q) + EA q [c] = ½ AB q + DC q. Panterque [e] ipsi circuli Quare [f] semicirculi super AB, DC, æquanter circulis ad FG, CA. Et [g] Circulus ad FG minus illo ad AC, hoc est minus paribus semicirculis super AC, DB æqualis est Salino, sive figuræ à quatuor semicirculis AB, BD, DC, CA concluſæ.

a 10. 2.
b *hyp.* & *alt* 2.
c *hyp.* & 4. 2.
d 15, *dif.*
e 2. 10.
f *ax.* 7
g *ax.* 3.

Nota.

(Salinon) sive σιλινον Luna est, quatenus vultu planissimè suo appartet, hoc est, μηνοειδὲς. Unde nomen antiquitùs erat puerorum amuletis.

Lemma

Lemma XV.

Fig. 281. *In ſemicirculo* A C B, *ſit* C B *chorda Pentagoni & recta* C D *per arcus* C A *punctum medium* D *tranſiens diametro* A B *producta occurrat in* E, *atque connectatur* D A *Cathetus:* F G *auferet* G F *ſemidiametro circuli parem.*

Jungantur CA, GD, DB, & è centro HD. Eſt igitur (ob [1]CAB = $\frac{1}{5}$ recti) CAD [b] = DAB = $\frac{1}{10}$ recti: utque ([2] DAH) [d] DHB = $\frac{4}{10}$ recti. Sed rectus C [c] = G, & FA commune, quare (in trigonis AGF, GAF) AC = [f] AG: necnon (in trigonis ACD, AGD) ob pares angulos ad A, AD commune, & AE = AG, erit [f] ACD = AGD = [6] $\frac{1}{5}$ [2] recti. = $\frac{4}{10}$ recti. atque ACD = [b] DBE, & DBA [k] = DGB. Unde DB = [l] DG.

Item quia DHG = $\frac{3}{5}$ recti, & DGH = $\frac{4}{5}$ recti, erit HDG [5] = $\frac{1}{5}$ recti, & DG [h] = GH.

Poſtremò quoniam (in triang. EDB, HDG) BDE [h] = (CAB [2] = $\frac{2}{5}$ recti) GDH, & uprius DGH = EBD, & DB = DG, erit EB [g] = GH, & EG [m] = radio BH.

a *Cor.* 10. 4.
b 17. 3.
c 9. 5.
d 5, 32. 1.
e 31. 3.
f 26. 1.
g *ſch.* 22. 3.
h *cor.* 22. 3.
k 32. 1.
l 6. 1.
m *ax.* 2.

Coroll. I.

Annexis CH, CG, erunt ACE, HDE, & HCG, GDB trigona iſoſcelia & ſimilia, ſimiliterque poſita & ad baſes ſecta. Nim. duas quintas recti æquant hinc HCB, HCG, GCE; inde EDB, BDG, GDH.

Coroll. II.

Liquet inſup. EC (= CA, chordæ $\frac{1}{10}$ totius circuli) diviſam eſſe in D mediâ ac extremâ ratione, cujus ſegmentum majus ED (= radio DH, ob DBE = DGH,) eſt latus hexagoni ordinati circulo ACB inſcribendi, minuſque DC decagoni, per 9. *e.* 13. pariterque juxta mediam extremamque rationem ſectas eſſe EG in B, BH in G, & EH tam in B quàm G, EA denique in centro H. Deinde æquantur eâm ECB tum $\frac{1}{2}$ GCE parti quintæ recti.

Binæ prop. quæ ſequuntur in editione Florentinâ ad indubium æternumque opus *Archimedis* de Spherâ prorſus pertinent. Codices etenim Arabici in 15. Lemma omnes deſinunt.

Arabi-

ARCHIMEDIS ΧΑΜΜΙΤΗΣ
SIVE
Liber de Arenæ numero.

ARbitrantur nonnulli, rex *Gelo*! arenæ numerum infinitum esse. Dico autem non solùm ejus, quæ est circa *Syracusas* reliquamque *Siciliam*, sed etiam quæ in omni regione habitabili pariter atque inhabitabili continetur. Sunt autem alii, qui non illum quidem infinitum putent, sed nullum dari denominatum numerum posse credant qui illius multitudinem exuperet.

Itaque eos qui ita opinantur, si ejusmodi arenæ molem animo comprehenderent, cujusmodi esset, si universa terra, repleto in eâ mari & cavitatibus omnibus, altissimorum montium vertices exæquaret; atque hujus ipsius rursus alterum multiplicem excogitarent, monimè dubium est existimaturos illius multitudinem numeros longè omnes, multúmque superare. Ego verò id ostendere conabor demonstrationibus Geometricis quas tu ipse assequeris: eorum videlicet numerorum, qui à nobis expressi traditique sunt in iis, quæ ad *Zoxippum* Scripsimus, nonnullos non solùm arenæ multitudinem superare, quæ terræ undique repletæ ut diximus æqualis esset, sed etiam quæ ipsi mundo parem haberet magnitudinem. Non enim ignoras mundum à compluribus Astrologis appellari Sphæram, cujus centrum quidem est terræ centrum, semidiameter autem est æqualis lineæ inter centrum solis & centrum terræ interjectæ. Hæc igitur in iis, quæ ab Astrologis scripta sunt, redarquens *Aristarchus Samius* positiones quasdam edidit, ex quibus sequitur Mundum proximè dicti mundi multiplicem esse. Ponit enim stellas inerrantes atque solem immobiles permanere, terram ipsum circumferri circa solem secundùm circumferentiam circuli, qui est in medio cursu constitutus; sphæram autem inerrantium stellarum circa idem centrum cum sole sitam, tantâ esse magnitudine, ut circulus secundum quem ponit terram circumferri, eam habeat proportionem ad distantiam stellarum fixarum, quam centrum Sphæræ habet ad superficiem. (Vide *Copernic.* revol. *l.* 3. *c.* 15.) Id verò manifestò constat fieri non posse. Quoniam enim Sphæræ centrum nullam

habet magnitudinem, neque perfectè ullam habere proportionem ad sphæræ superficiem existimandum est. Quare credibile est *Aristarchum* ita intellexisse, *utputa in hypothesium primâ, &c.*

Suis igitur numeris notisque (captu sanè perfacilibus) ut exhiberet Senex ille Siculus quantum arenarum capiendo esset fixarum orbis jam penitus oppletus, imò eo plusculum, hæc ante cætera poni voluit.

Hypotheses.

1. Est secundùm *Aristarchum*, qui inter sphæras fixarum solisque quàm inertes & defixas globum nostrum circum agitabat, ut hæc tellus: ad orbem Revolutionis Annuæ, (qui veterum Astronomorum Mundus fuit,) ita iste. ad orbem fixarum: Fiatque adeò horum diametris ἀνάλογον, per 18. *e.* 12.

2. Terræ autem ambitus, quem Antiqui Geometræ 300000 stadiorum esse comprobarunt, (quia decuplo liberalior maluit illis esse *Archimedes* ἀναμφιλόγου ἕνεκεν) haud superet trecentas stadiorum Myriadas, sitquè ita (per Cyclometrica *Archim*) diameter terrestris minor quàm stadiorum centrum Myriades.

3. Statuatur solis diameter & terrestri major, & quidem trigecupla diametri Lunaris, neque plus. Quid enim? hanc *Eudoxus* noncuplam Lunaris diametri pridem asseruerat, *Phidiasqué* duodecuplam: & demonstraverat sanè *Aristarchus* (*prop.* 9. libelli aureoli qui adhuc adservari meruit,) nè vix vigecuplam, atqui esse plusquam ipsius octodecuplâm.

Observationes.

1. *Aristarchus* quidem capto solis angulo visuali (quâ in re & manus & visus & organa nimiùm fallere solent,) aiebat solis discum partem Zodiaci vigesimam & septingentesimam subtendere: Veruntamen *Siculus* noster, quoniam Problema suum subtilius eo quicquam haud postulat, observavit binos modò angulos, alium quidem angulo solis paulò majorem, aliumque eo minorem. Is autem erat observandi modus.

Dummodo in crenâ regulæ super palum versatilis jaciat Cylindrulus, solis jàm exorti oppositos solum margines visui ad extremum regulæ posito permittens, angulus quem capiunt rectæ à mediò visu Cylindrulum tangentes, major fuerit visuali solis angulo si visio

visio fieret in puncto: Quia vero hoc aliter fit, ponatur jam ad regulæ extremum, ubi prius erat visus, globulus, diametrum habens non minorem latitudine pupillæ: atque hunc globum necnon Cylindrulum tangant binæ rectæ; eæ accursu suo angulum efficient minorem angulo solis visuali, cùm utrinque aliquid solaris disci compareat. Cæterum magnitudo visu non minor hac arte investigatur: Sumantur duo Cylindri bene tornati, tersi, & æquè crassi, quorum alter sit albus, alter non albus: Non-albus verò ad oculum quam proximè statuatur in crenâ regulæ prædictæ, alter autem ab oculo magis distet; siquidem viso non-albo albus juxta varia intervalla promotus dispareat, magnitudo paris crassitudinis cum Cylindris istis non minor erit diametro visûs, quod suprà requirebatur. Ubi denique Cylindrulus in crenâ regulæ collocatus totum solis discum à visu penitus abripit, rectæ quæ à visu ducuntur Cylindrulum contingentes continebunt coeundo angulum haud minorem $<^{\circ}$ solis visuali. Ita autem deprehensus est angulus solis visualis major esse $\frac{1}{200}$ recti anguli, minorque $\frac{1}{164}$ recti: Modos tamen alios stellarum diametros & quidem accuratius paulò captandi vide apud *Ricciolum* in Almag.

2. Observatum est 25 papaveres (μάκωνας) in rectam lineam dispositos longitudinem digitalem superare.

Sit tamen, majoris evidentiæ ergo, diameter papaveris haud minor quàm digiti pars quadragesima: atque constet corpus papavere non majus decem millibus arenarum, neque pluribus.

Lemmata.

1. Solis diameter major est latere chiliagoni orbitæ revolutionis annuæ inscripti.

Plano per terræ centrum *h*, visúmque *d* secentur, sole jam exorto, Orbis annuæ revolutionis, terra ipsa, & Sol secundum circulos *abc*, *def* & *sg*. quem quidem tangant rectæ *dn*, *dt*, itemque *hr*, *hq* secantes circulum *abc* in *a*, *b*. Quoniam, dum *k* horizontem stingit, [a] $< hdk$ rectus est, exceditquè [b] terrestrem diameter solis, erit sole jam prorsus elevato, $< hdk$ obtusus, [c] & $hk \sqsubset dk$, nec non *rhq* ($<$ [d] *ndt*, angulo solis) $\sqsupset \frac{1}{164}$ recti: adeòque recta *ab* $\sqsupset$ subtensâ $\frac{1}{4 \times 164}$ circuli *abc*. Atqui perimeter 656 goni. *kh* :: $\sqsupset$ 44 : 7 :: $\sqsupset$ 656. $104\frac{4}{11}$, atque adeò latus 656-goni. *kh* :: $\sqsupset$ 1. $104\frac{4}{11}$: quare $\frac{ba}{kh}$ :: $\sqsupset$ ($\frac{11}{1148}$, *i. e.* in integris, :: $\sqsupset$) Fig. 283.

a 18. 3. Commandini.
b *hyp.* 3. *pag.*
c 32, 19. 1.
d 24 *opt.* Aucl.
e *Observ.* 1.
f *cor.* 33. 6.

habet magnitudinem, neque perfectè ullam habere proportionem ad sphæræ superficiem existimandum est. Quare credibile est *Aristarchum* ita intellexisse, *utputa in hypothesium primâ, &c.*

Suis igitur numeris notisque (captu sanè perfacilibus) ut exhiberet Senex ille Siculus quantum arenarum capiendo esset fixarum orbis jam penitus oppletus, imò eo plusculum, hæc ante cætera poni voluit.

Hypotheses.

1. Est secundùm *Aristarchum*, qui inter sphæras fixarum solisque quàm inertes & defixas globum nostrum circum agitabat, ut hæc tellus: ad orbem Revolutionis Annuæ, (qui veterum Astronomorum Mundus fuit,) ita iste. ad orbem fixarum: Fiatque adeò horum diametris ἀνάλογον, per 18. *e.* 12.

2. Terræ autem ambitus, quem Antiqui Geometræ 300000 stadiorum esse comprobarunt, (quia decuplo liberalior maluit illis esse *Archimedes* ἀναμφιλόγου ἕνεκεν) haud superet trecentas stadiorum Myriadas, sitquè ita (per Cyclometrica *Archim*) diameter terrestris minor quàm stadiorum centrum Myriades.

3. Statuatur solis diameter & terrestri major, & quidem trigecupla diametri Lunaris, neque plus. Quid enim? hanc *Eudoxus* noncuplam Lunaris diametri pridem asseruerat, *Phidiasquè* duodecuplam: & demonstraverat sanè *Aristarchus* (*prop.* 9. libelli aureoli qui adhuc adservari meruit,) nè vix vigecuplam, atqui esse plusquam ipsius octodecuplâm.

Observationes.

1. *Aristarchus* quidem capto solis angulo visuali (quâ in re & manus & visus & organa nimiùm fallere solent,) aiebat solis discum partem Zodiaci vigesimam & septingentesimam subtendere: Veruntamen *Siculus* noster, quoniam Problema suum subtilius eo quicquam haud postulat, observavit binos modò angulos, alium quidem angulo solis paulò majorem, aliumque eo minorem. Is autem erat observandi modus.

Dummodo in crenâ regulæ super palum versatilis jaciat Cylindrulus, solis jàm exorti oppositos solum margines visui ad extremum regulæ posito permittens, angulus quem capiunt rectæ à mediò visu Cylindrulum tangentes, major fuerit visuali solis angulo si visiò

visio fieret in puncto: Quia vero hoc aliter fit, ponatur jam ad regulæ extremum, ubi prius erat visus, globulus, diametrum habens non minorem latitudine pupillæ: atque hunc globum necnon Cylindrulum tangant binæ rectæ, eæ accursu suo angulum efficient minorem angulo solis visuali, cùm utrinque aliquid solaris disci compareat. Cæterum magnitudo visu non minor hac arte investigatur: Sumantur duo Cylindri bene tornati, tersi, & æquè crassi, quorum alter sit albus, alter non albus: Non-albus verò ad oculum quam proximè statuatur in crenâ regulæ prædictæ, alter autem ab oculo magis distet; siquidem viso non-albo albus juxta varia intervalla promotus dispareat, magnitudo paris crassitudinis cum Cylindris istis non minor erit diametro visûs, quod suprà requirebatur. Ubi denique Cylindrulus in crenâ regulæ collocatus totum solis discum à visu penitus abripit, rectæ quæ à visu ducuntur Cylindrulum contingentes continebunt coeundo angulum haud minorem $<^{\circ}$ solis visuali. Ita autem deprehensus est angulus solis visualis major esse $\frac{1}{200}$ recti anguli, minorque $\frac{1}{164}$ recti: Modos tamen alios stellarum diametros & quidem accuratius paulò captandi vide apud *Ricciolum* in Almag.

2. Observatum est 25 papaveres (μάκωνας) in rectam lineam dispositos longitudinem digitalem superare.

Sit tamen, majoris evidentiæ ergo, diameter papaveris haud minor quàm digiti pars quadragesima: atque constet corpus papavere non majus decem millibus arenarum, neque pluribus.

Lemmata.

1. Solis diameter major est latere chiliagoni orbitæ revolutionis annuæ inscripti.

Plano per terræ centrum *h*, visúmque *d* secentur, sole jam exorto, Orbis annuæ revolutionis, terra ipsa, & Sol secundum circulos *abc*, *def* & *sg*. quem quidem tangant rectæ *dn*, *dt*, itemque *hr*, *hq* secantes circulum *abc* in *a*, *b*. Quoniam, dum *k* horizontem stingit, [a] $< hdk$ rectus est, exceditque [b] terrestrem diameter solis, erit sole jam prorsus elevato, $< hdk$ obtusus, [c] & $hk \sqsubset dk$, nec non *rhq* ($<$ [d] *ndt*, angulo solis) $\sqsupset \frac{1}{164}$ recti: adeòque recta *ab* $\sqsupset$ subtensâ $\frac{1}{4 \times 164}$ circuli *abc*. Atqui perimeter 656 goni. *kh* :: $\sqsupset$ 44 . 7 :: $\sqsupset$ 656. $104\frac{4}{11}$, atque adeò latus 656-goni. *kh* :: $\sqsupset$ 1. $104\frac{4}{11}$: quare $\frac{ba}{kh}$ :: $\sqsupset$ ($\frac{11}{1148}$, *i. e.* in integris, :: $\sqsupset$) Fig. 283.

a 18. 3. Commandini.
b *hyp.* 3. *pag.*
c 32, 19. 1.
d 24 *opt.* Aucl.
e *Observ.* 1.
f *cor.* 33. 6.

g Ptol. Alm. l. 1. c. 9.
h 13. 5.
i 6. 1.
k 28. 5.
l 15. def. 1.
m 3. 18. 3.
n 4. 6.
o 9. 5.
p hyp. 3.
q 8. 5.
Fig. 284.
r Cor. 16. 3.
s 4. ax.
t ut priùs.
u cor. 37. 3. & 15. 5.
x 12, 28. 1.
y Sch. 31. 3.
z 33. 6.
Fig. 285.
a 21. 1
b cor. 15. 4.

$\frac{1}{200}$: atque bA multò $\sqsupset \frac{1}{100}$. Est autem bA diameter circuli fg quippe (ob ab, bk, rectos, & b communem) est $\square bk. ba = bk. kr$, ut ab ad kr, unde $abr = akr$, & diameter ($= 2kr$) $= ab$; Estque [p] $2by \sqsupset ab$ sive $2ks$, unde $by + ky \sqsupset \frac{101}{100} bk$, & reliquum $ys \sqsubset \frac{99}{100} bk$, adeòque $bk. ys \sqsubset 100. 99$.

Quia autem tam br [r] $\sqsupset bk$, quàm $ys \sqsupset dt$, (Scil. junctis dy, st, obtusi [s] sunt $\angle dyz$, zst, & [t] $dz = yz$ necnon $ez \sqsubset zs$, eúque [u] $ys \sqsupset dt$.) erit $\frac{br}{dt} \left(:: \sqsupset \frac{br}{ys} :: \sqsupset \frac{bk^2}{ys} \right) :: \sqsupset \frac{A}{\frac{99}{100}}$. Præterea in trigonis rectangulis bkr, dkt, quia $kr = kt$, ac kr (hq) $\sqsubset dt$, erit angulus [x] major tdk. $rbk :: \sqsubset bk. dk$. [Compositis etenim ad rectos trigonis kbd, kbr, sit $df = bk$, & [y] $fi \parallel kr$, circuli igitur pares circa pares diametros df, bk, [z] transibunt per i, r, eritque $\lessgtr \frac{fdi}{rbk} \left(:: {}^{2}\text{arcus } fi. \text{ arcus } kr \right)^{s}$ $:: \sqsubset \frac{\text{recta } fi}{\text{rect. } kr}$ [b] $:: \sqsubset \frac{(fd)\,kb}{kd}$ Vel Componantur triangula ista ad acutos, b, d, & centro d, intervallo do, describatur circulus poq, Erit igitur $\lessgtr \frac{kdo}{odt} \left(h.\,e. \frac{\text{sector } pod}{\text{sect. } oqb} :: \sqsupset \frac{\text{sect. } pod}{\Delta\, otb} \right)$ $:: \sqsupset \frac{\Delta\, kod}{\Delta\, otb}$ sive $\frac{ko}{ot}$; & componenti, $\lessgtr \frac{kdt}{kbr} \left(:: \sqsupset \frac{(ks)kr}{os} \right)$ $:: \sqsupset e. \frac{br}{dt}$.]

Inde [a] $\frac{ndt}{rbk} \left(:: \sqsupset \frac{br}{dt} \right)$ multò $:: \sqsupset \frac{22}{99}$. Tum, quia ndt (major $\frac{1}{200}$ recti) $rbq :: \sqsupset \frac{1}{200} \cdot \frac{22}{100}$, h. e. $1001. 99$, est rbq ($\sqsubset \frac{1}{200} \frac{22}{000}$ recti, h. e. $\sqsubset \frac{1}{101} \cdot \frac{2}{99}$ recti) multò $\sqsubset \frac{1}{303}$ recti. Solis igitur diameter ba major est subtensâ parti $\frac{1}{313}$ circumferentiæ totius, & adhuc major subtensâ $\frac{1}{1000}$ circumferentiæ seu latere Chiliagoni Orbitæ annuæ inscripti.

Coroll.

Hinc autem sequitur, quia ambitus Chiliagoni, (qui quidem [a] excedit tres diametros Orbitæ annuæ cui inscribitur, cum vel ambitus hexagoni [b] æquet tres diametros sui circuli,) minor est mille diametris

diametris solis, & adhuc minor tricies mille diametris Lunæ aut circæ, Diametrum Orbis revolutionis eorum (quem mundum vocant, minorem esse decies mille diametris terræ, adeoque minorem γ centrum Myriadibus myriadum stadiorum, sive γ hyp. 2.
10000 × 10000000.

2. Τῶν ἀπλῶν ἀριθμῶν.

Novem primi gradus seu Periodi ab unitate in ratione decuplâ (quæ ad præsens institutum abundè sufficit) progredientis vocentur Numeri Primi: & gradus octo præter unitatem Octas Prima. Isti verò numeri commodè satis exprimi solent, notis puta distinctis ad Myriades & ad Myriadum Myriades notis illis repetitis. Deinde novem gradus, qui proximè sequuntur incipiendo à nono seu ultimo gradu, numerorum primorum, appellentur Numeri Secundi necnon octo ipsius gradus excepto itidem primo, Octas secunda: Atque ita porro

3. Si numeri ab unitate proportionalis fuerunt, ut $\begin{matrix} 1 \\ \text{seu } 1. \end{matrix} = \begin{matrix} \alpha. \beta. \gamma. \\ b. b^2 \end{matrix}$
$\delta. \varepsilon. \zeta. \eta. \theta. \iota. \varkappa. \lambda.$
$b^3. b^4. b^5. b^6. b^7. b^8. b^9. b^{10}$. & aliqui δ, θ ex eadem analogeâ sese multiplicaverint, factus inde numerus ($\delta \times \theta =$) χ æqualis erit ipsi λ, qui tantum distet à θ majore multiplicantium, quantum minor ab unitate in eadem analogiâ.

Quippe [a] $\begin{matrix} \alpha. \beta :: \theta. \iota \\ \beta. \delta :: \iota. \lambda \end{matrix}$ & $\alpha. \delta :: \theta. \lambda$: quare [b] $\theta\ \lambda$ seu $\chi = \alpha\lambda$ [c] $= \lambda$. Patet etiam $\lambda - \iota$ distare ab unitate quantus est numerus ex utrisque conflatus, quibus se invicem multiplicantes δ, θ ab unitate absunt. Sunt equidem $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta$, quot ipse θ ab unitate distat, at $\iota, \varkappa, \lambda$, sunt uno minores, quàm quibus δ distat ab unitate: etenim unà cum θ totidem erunt.

a hyp. & 14. 7.
b 19. 7.
c 5 ax. 7.

His igitur partim positis, partim verò demonstratis, quod jam propositum est, ostendemus.

Propositio Princeps.

Arenæ numerus, quæ magnitudinem obtineat æqualem Sphæræ stellarum inerrantium ab *Aristarcho* positæ, minor est mille Myriadibus octavorum, quos vocamus, numerorum, tantum abest ut sit vel infinitus vel ineffabilis.

Quia diameter papaveris est ad digitum :: (1. 40 [a] :: 40. 1600 :: 1) 1600. 64000; Sphæra ex diametro digitali non [b] continebit plusquam 64000 papaverum globosorum, sive [a] arenarum 64000 × 10000,

a Observ. 2.
b 18. 2.

10000, hoc est, sex myriades myriadum quatuorque myriadum millis = sex α^{ii} + quatermillibus myriadum α^{i}: atqui ⊏ decem α^{ii}. Numerus autem arenarum, quas capit sphæra ex diametro centum digitorum, adeóque [b] sphæræ ex digitali diametro multiplex centum myriadibus, minor est 1000000 × decem η^{ii}, hoc est, minor mille myriadibus α^{ii}: Nam 10 α^{ii} × 1000000, qui fit ex 10 η^{ii} termino decimo ab unitate in ratione decuplâ, & ex 1000000 termino septimo [c] erit progressionis istius terminus decimus sextus; octo autem primi termini pertinent ad η^{i}, & octo sequentium ultimus valet mille myriades ✠ η^{ii}. Rursus numerus arenarum, unà cum monade quibus constat sphæra ex diametro decies mille digitorum, qui quidem stadium superant, hoc est, sphæra [b] centum myriadibus multiplex sphæræ ex diametro digitali, minor est 1000000 × mille myriades η^{ii}, hoc est, minor decem myriadibus ✠ η^{iii}, sive progressionis istius termino (16 + 7 — 1 = [c]) 22do, quandoquidem octo primi termini cum unitate pertineant ad η^{i}, octo sequentes ad η^{ii}, & cæterorum sex ultimus desinat in decem myriades η^{iv}. Numerus etiam arenarum, quibus repletur sphæra centum stadiorum diametrum habens adeóque sphæræ ex diametro unius stadii multiplex myriadibus centum, minor erit 1000000 × decem myriades η^{iii}, sive progressionis termino (22 + 7 — 1) 28vo, hoc est, minor mille unitatibus ✠ η^{iv}. Pariter sphæra ex diametro denum millium stadiorum, adeóque sphæræ centum stadiorum diametrum habentis multiplex centum myriadibus, continet arenarum numerum minorem 1000000 × 1000 unitates ✠ η^{iv}, sive termino progressionis (28 + 7 — 1) 34to, hoc est, minorem decem unitatibus ✠ η^{v}. Dein sphæra ex diametro centum myriadum stadiorum continet arenas pauciores quàm 1000000 × 10 unitates ✠ η^{v}, seu quantitatem termini 40^{mi}, hoc est, pauciores quàm mille myriades ✠ η^{v}. Item sphæra ex diametro decies mille myriadum stadiorum habet arenarum numerum minorem 1000000 × mille myriades ✠ η^{v}, seu termino 46to, hoc est, minorem myriadibus decem ✠ η^{vi}: Et sphæra ex diametro centum myriadum myriadum stadiorum, quæ [d] orbis annui diametro major est continet arenarum numerum minorem 1000000 × myriades decem ✠ η^{vi}, sive termino 52do, hoc est, minorem mille unitatibus ✠ η^{vii}. Ergo mundus veterum Astrologorum seu orbis revolutionis annuæ non capit tot arenas quot sunt mille unitates ✠ η^{vii}. Denique numerus arenarum quæ repleant fixarum sphæram *Aristarchicam*, minor est mille myriadibus ✠ η^{viii}. Quoniam enim diametri terræ, mundi Astrologorum, orbisque fixarum fuit ∺ [e], ostensáque est diameter mundi

c *Lemma* 3.

d *Cor. lem.* 1.

e *Hyp.* 1.

istius

[illegible] minor 10000 diametris terræ, erit totius fixarum orbis diameter minor 10000 diametris mundi, & fixarum orbis minus decies millies decies mille myriades mundorum: unde numerus arenarum, quas continebit sphæra æqualis fixarum orbi juxta *Aristarchum*, minor erit $10000000000000 \times$ mille unitates $\overline{\text{M}}^{\text{VII}}$, sive progressionis termino $(13+52-1)\ 64^{10}$, qui est gradus octavus $\overline{\text{M}}^{\text{VIII}}$, minor mille myriadibus $\overline{\text{M}}^{\text{VIII}}$. Patet ergo propositum. Hæc autem, ex *Gelone* quamplurimis quidem, qui Mathematicis instructi non sunt, non admodum credibilia fore arbitror: illis verò qui ea didicerunt, & circa distantias & magnitudines terræ, solis, mundique totius elaborarunt, credibilia prorsus esse propter demonstrationem. Quapropter & de his ipsis speculari aliquos non absurdum esse existimavi.

ARCHI-

ARCHIMEDIS

EXOTERICA.

PRæter illa *Archimedis* opera quæ hic exponuntur, alia memorat *Rivaltus* partim ab *Archimede* ſcripta, partim ab illo facta; ſed quorum particularis notitia, præ temporum injuriâ, ad nos non pervenit.

1. Ex *Vitruvio* ad hunc ſenſum narrat. Cùm *Hiero Syracuſarum* Rex, Aurum certo pondere Artifici tradiderat, qui Coronam inde conficeret; poſteaque intellexerat Artificem, Auri parte ſurreptâ, Argentum æquali pondere ſubſtituiſſe; *Archimedem* ea de re conſuluit. Ille autem Balneum ingreſſus, effluentem aquam conſpicatus, hinc anſam cepit determinandi, quantum Auri ſurreptum fuerat; ſtatimque præ gaudio nudus exiliens Balneo, vociferatus Εὕρηκα, Εὕρηκα, domum ſe contulit. Nempe, cum Aurum, ejuſdem ponderis, minoris molis ſit quàm Argentum; moleſque corporis irregularis non aptiùs colligi poſſit, quàm ex Aquæ menſurâ cujus locum occupet; explorato primùm, quantum ſpatii in Aquâ occuparet Corona, quantumque Aurum purum ejuſdem ponderis, & quantum denique æqualis ponderis Argentum; hinc calculo colligendum eſſe, quantum Auri & quantum Argenti miſcuerat Artifex.

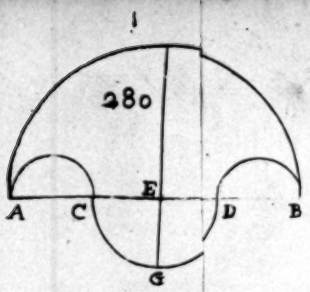
Inventum certè *Archimede* dignum. Sed, quomodo ille calculum inſtituerit, & quantâ ſubtilitate ſingulorum molem rimatus eſt, non exponit *Vitruvius*; contentus rem craſſiùs expoſuiſſe, quam ipſam (puto) executus eſt *Archimedes*. Et, ſiquid ea de re ſcripſit *Archimedes* ipſe, periit. Alii alios modos expoſuerunt; inter quos *Ghetaldus*, in ſuo *Archimede promoto*; atque *Johannes Baptiſta Hodierna* in ſuo *Archimede Redivivo*, impreſſo *Panormi Siculorum*, in 4°, Anno 1644 Italicè.

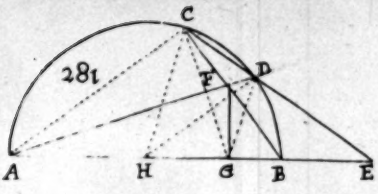
Calculus ſic commode inſtituitur. Pondus Auri quantum eſt Coronæ, occupet ſpatium L; Pondus Argenti huic æquale, ſpatium L + M. Pondus Coronæ, ſpatium L + N. Ergo, ut N ut ad M, ſic pondus Argenti admixti, ad pondus Coronæ. Nempe ſpatii incrementum

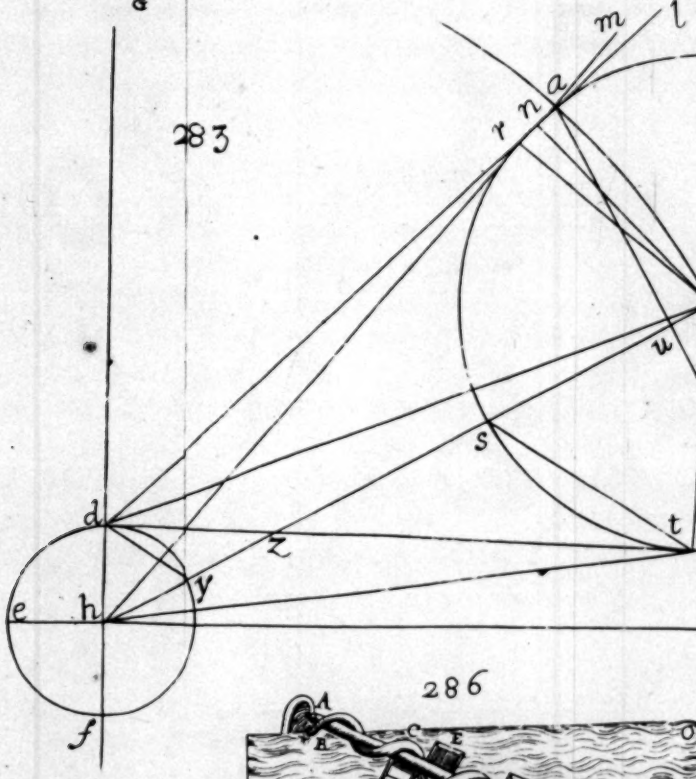
284.

285.

286,
287.

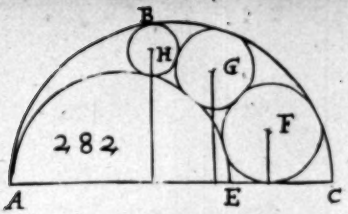

280
A
C
E
D
B
G

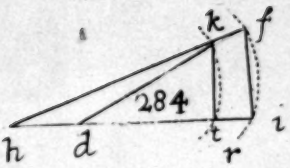

281
C
F
D
A
H
G
B
E

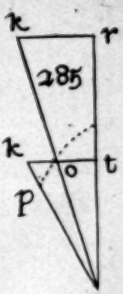

283
m
l
a
r
n
u
s
d
t
z
y
e
h
f

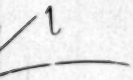
286
A
B
C
E
D
F
G
H
I
K
P
Q
L
M
O

E

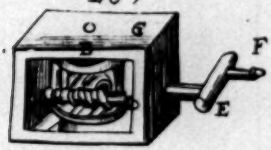

B
H
G
282
F
A
E
C

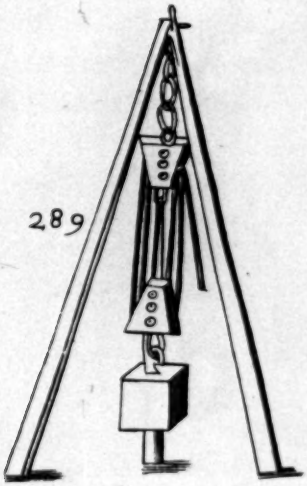

k
f
284
h
d
t
r
i

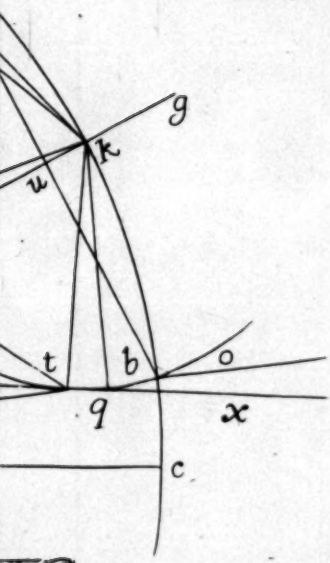

k
r
285
k
o
t
p


l

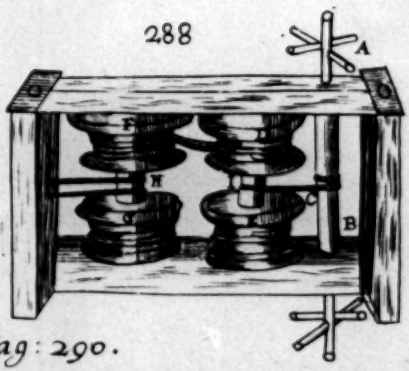
287


o
G
F
E


289


g
k
u
t
b
o
q
x
c

288


A
B

O
P
M

crementum M prodiret ſi totum Aurum Argento commutatum foret; adeóque incrementum N, oſtendet quantum jam commutatum ſit.

2. Ex *Athenæo* & *Diodoro*, Cochleam *Archimedis* memorat ad Aquam ex Sentinâ ſtupendi Navigii *Hieronis* exhauriendam, unius hominis operâ: eandemque machinam ad aquas ex Fodinis, Lacubus, ſimilibuſque exhauriendis adhibitam. Recentiores ex conjecturâ hujuſmodi figuram accommodant: & ſpeciatim *Guido Ubaldus* in peculiari Tractatu. Fig. 284.

3. Ex *Athenæo*, memorat *Archimedis Helicem*, cujus ope (cum paucis aliis inſtrumentis) ſtupendum illud navigium in mare deduxit *Archimedes*. Figuram hujuſmodi, ex conjecturâ ſupplent. Fig. 285.

4. Ex *Zetze* & *Oribaſio*, recenſet *Archimedis* Triſpaſtum, quo 7000 mediorum pondus attrahebat. (Neſcio an 50000 legendum ſit, propter πενταμυριόμνιον.) Figuraſque adhibet has duas. Fig. 286, 287.

5. Ex *Polybio*, & aliis, memorat *Archimedis* Tormenta Bellica, Balliſtas, Catapultas, Sagittarios, Scorpiones, Manum ferream cum catena (Tollenovis inſtar) aliúmque apparatum, quibus contra copias, naveſque, *Marcelli* & *Appii* pugnatum eſt.

6. Ex *Galeno* & *Zetze*, *Archimedis* Πύεια memorat, ſeu ſpecula Uſtoria, quibus *Marcelli* Naves incendebat. De quibus *Cavalerius*, in tractatu poſthumo, *Del Specchio Uſtorio*, (*Bononiæ* impreſſo in 4°, Anno 1650.) Italicè fuſius agit.

7. Ex *Zetze*, *Pappo*, & *Tertulliano*, memorat *Archimedis* Pneumatica & Hydroſcopica: nec hujuſmodi tantum Inſtrumenta conſtructa, ſed & libros ab *Archimede* conſcriptos.

8. Ex *Claudiano*, *Archimedis* Σφαιροποιΐαν memorat; ſeu machinam Cœleſtium motuum æmulam.

Verùm quum horum omnium nihil jam exſtet ab *Archimede* conſcriptum; non niſi ex dubiis conjecturis ſuppleri poſſunt.

FINIS.

ERRATA sic corrigantur.

Pag.	Lin.	In Argumento.	Pag.	Lin.	
2	8	A pro B.	54	13	A E pro B E.
2	13	Y pro H & G.	58	25	M C pro Z C.
3	1	Z vel Y pro X	59	ult.	majus pro minus
4	pe.	C F H pro F C M.	61	16	G I pro C I.
9	19	B M pro D M	62	22	L E pro L I.
10	34	F N O L pro P X O L	64	26	O pro I.
11	3	A G pro H G.	64	29	D C pro G D.
15	10	F E — D E pro G F — C D	66	6	B X K pro B X R. & F F pro B E.
16	17	D E q. E E = B A [illegible]	66	14	A F pro A G
		D E q. E E = A F [illegible]	66	17	D E o pro D A q
19	21	C F pro C E	68	13	H F [illegible]
20	ult.	C D pro E B	68	11	[illegible]
21	8	Q A E — E B pro Q E B — A E	69	12	G I pro G O
22	18	B A pro D A	70	4	[illegible]
23	4	A G pro A E	70	8	A E pro A E
30	1	L X pro L E.	71	1	[illegible]
31	1	in margine, D A pro [illegible]	71	2	[illegible]
32	14	$\frac{4 D E q}{B X}$ pro $\frac{4 E}{B X}$	71	12	[illegible]
34	26	B H pro X H	72	10	[illegible]
35	5	F G pro O G	73	8	[illegible]
35	6	F H pro O H	74	8	[illegible]
37	11	C B pro A B	75	11	[illegible]
37	pe.	Y Z pro V Z	76	pe.	[illegible]
38		Fig. 40. pro 94	79		[illegible]
41	13	B H pro B E			[illegible]
43	pe.	B A C pro B A E			[illegible]
45	25	X V pro X Y			[illegible]
52	21	A B pro A E			[illegible]

ERRATA sic corrigantur:

pag.	lin.	
		In Argumento.
2	8	A *pro* B.
2	13	Y *pro* H & G.
3	2	Z *vel* Y *pro* X.
8	*fe.*	C F H *pro* F G M.
9	19	B M *pro* D M.
10	34	F N O L *pro* P X O L.
11	3	A G *pro* H G.
16	10	F E ⌐ D E *pro* G F ⌐ D E.
16	17	DEq. EB × BA :: Tq. Mq *pro* DEq. EB × AE :: Mq. Tq.
19	11	C F *pro* C E.
20	*ul.*	C D *pro* F B.
21	4	Q.AE—EB *pro* Q.EB—AE.
22	28	B A *pro* D A.
23	4,5 6,7	A G *pro* A E.
30	1	L X *pro* L K.
31	1	*In margine*, D E *pro* D C.
31	14	$\frac{4\,DEq}{BX}$ *pro* $\frac{4\,FEq.}{BX}$
31	26	B H *pro* E H.
35	5	F G *pro* O G.
35	6	F H *pro* O H.
37	11	C B *pro* A B.
37	*pe.*	Y Z *pro* V Z.
38		Fig. 49. *pro* 94.
41	13	B H *pro* B E.
43	*pe.*	B A C *pro* B A D.
45	25	X V *pro* X Y.
52	22	A, B *pro* A, F.
54	13	A E *pro* B E.
58	25	M C *pro* Z C.
59	*ul.*	majus *pro* minus.
62	16	G I *pro* C I.
64	22	L E *pro* L I.
64	26	O *pro* I.
64	29	D C *pro* G D.
66	6	B X K *pro* B X R, & B F *pro* B E.
66	16	A F *pro* A G.
68	17	D B q *pro* D K q.
68	33	H F × F E *pro* H F × F D.
68	34	
69	22	G I *pro* G L.
69	28	T O *pro* I O.
70	4	sectionum *pro* contingentium.
70	8	A E *pro* A F.
70	10	L S H *pro* L S F & A L N *pro* A L M.
74	22	*Deest* + *inter* A Eq & C X × X A
75	*pe*	*Deest* + *inter* F X q & C E × E D
77	18	E C *pro* F C.
78	21	*Citatur* 4 & 2 :: 6 *pro* 19.5.
79	10	A B *pro* A D.
79	26	K O B *pro* K O P.
86	5	F A *pro* D F.
91	*ul.*	O P *pro* O D.
96	*pe*	F G *pro* F M.
99		*Ult. duæ lineæ ita corrigantur,* FN.FL::NK.KL & (ob sect. AMD) NK.KL :: NM . ML quare FN.FL::NM.ML *Q.e.a.*
102	8	A D, B G *pro* A C, B C.

In Citationibus.

Prop. 9 *nota* f, *pro* 17 6 *lege* 16.6. *pr.* 16. *n.* a, 13 hujus *l* 12 hujus. *pr.* 20 *n.* c, 3.6 *l.* 1.6. *pr.* 33. *n.* c, 4.1 4.2. *pr.* 38 *n.* c, 21 hujus *l* 37 hujus. *pr.* 44 *n.* a, 31 hujus *l.* 37 hujus. *pr.* 45 *n.* f, 7.1 *l.* 7.5. *pr.* 45. *n.* g, 4.1 *l.* 4.6. *pr.* 51. *n.* m, 7.1 *l.* 7.5. Libri I.

Prop. 2. *nota* g, *pro* 6.5 & 3 2x. 1 *lege* 6 & 5.2. *pr.* 4. *n.* g, 53. hujus *l.* 53.1 hujus. *pr.* 48. *n.* g. *deest hæc citatio* (17 2x. 1.) Libri II.

Prop. 4. *nota* 2, *pro* cor. 44 hujus *lege* cor. 15.2 hujus. *pr.* 8. *n.* k, 8.1 *l.* 4.3 hujus. *pr.* 16. *n* d, & *pr.* 16, 17, 18, 19. *n.* b, *in singulis pro* 16.5 *l.* 4.6. *pr.* 20. *n.* c, 16.3 *l.* 4.6. *pr.* 21. *n.* b, 46.5 *l.* 4.6. *pr.* 22. *n.* k, 2.6 *l.* 6.2. *pr.* 23. *n.* b, 16.5 *l.* 4.6. *pr.* 23. *n.* d, *l.* facilè deducitur ex 15.3 hujus. *pr.* 33. *n.* d, 2.6 *l.* 6.2. *pr.* 34 *n.* c, 15.6 *l.* 16.6. *pr* 37. *n* b, 49 & 51. hujus *l.* 2 & 11.3 hujus. *pr.* 44. *n* b, & *pr.* 45. *n.* c, *pro* 15 6 *l.* 16.6. *pr.* 56. *n.* p, ex 2 *vel* 4.8 *l.* 2 *vel* 4.3. Libri III.

Prop. 14 *nota* 2, *pro* cor. 14 hujus *lege* 5 hujus *pr.* 15. *n.* b, 36.1 hujus *l.* 39.3 hujus. *pr.* 21. *n.* a, 6 hujus *l.* 8 hujus. *pr.* 21. *n.* b, 15 hujus *l.* 17 hujus. Libri IV.

In Schematis.

Fig. 14. *deest* linea F G. fig 30 *deest* D *ubi* E H *occurrit sectioni*. fig. 136. *pro* H *lege* B. fig. 148 *deest* D *ubi* lineam A C *bisecat* K B. fig. 176. *deest* E. fig. 194. *deest ubi* Y *ubi* L X *diametro occurrit*. fig. 196 *deest* E *ubi* D K *sectioni occurrit*.